МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

XXVI Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

Тезисы докладов

Москва 2004

УДК 51 + 53

XXVI Конференция молодых ученых
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова
Тезисы докладов

В настоящем сборнике представлены тезисы докладов, вошедших в программу XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (12 – 16 апреля 2004 г.).

XXVI Conference of Young Scientists,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
Moscow State University
Abstracts

Редактор — Т. В. Родионов

© Механико-математический факультет МГУ, 2004

Подписано в печать 05.04.2004 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 9 п.л.
Заказ 2 Тираж 150 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова

Содержание

УДК 519.689.3, 519.68: 681.513.7

Метод машинного обучения для автоматической классификации текстов

М. С. Агеев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Классификация (рубрикация) документов, то есть описание содержания документов через элементы некоторого замкнутого списка тем — рубрикатора, является распространенной технологией упорядочивания информации. Рубрикаторы используются для поиска документов, навигации в больших информационных ресурсах и обмена метаинформацией в информационных системах. Для информационных ресурсов большого объема имеет смысл говорить только об автоматической классификации.

В докладе описывается алгоритм автоматической классификации текстов, основанный на построении описания рубрики при помощи машинного обучения. Описываемый метод может использоваться для классификации текстов, экспертной оценки содержания рубрики, оценки сложности описания рубрики.

Алгоритм строит описание рубрики в виде булевской формулы фиксированной структуры. Получаемая формула имеет вид:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{rubr}} = \cup_{i=1}^{k} \cap_{j=1}^{j_i} l_{i,j}$$

где $l_{i,j}$ — слово в нормальной форме (лемма). Конъюнкции, составляющие формулу, имеют длину от 1 до 3.

То есть подыскиваются альтернативы, в сумме описывающие смысл рубрики, каждая альтернатива может быть задана как пересечение нескольких независимых факторов.

Такой вид формулы описания рубрики взят на основе анализа опыта экспертов, составляющих формулы-описания рубрик вручную.

Полученная формула используется в качестве запроса к полнотекстовой информационной системе. При этом каждому элементу формулы — лемме — сопоставляется множество документов, содержащих данную лемму (слово, равное после приведения к нормальной форме).

В докладе приводится анализ алгоритма и его модификаций, сравнение алгоритма с другими методами машинного обучения на реальной коллекции полнотекстовых документов.

УДК 539.3

Анализ устойчивости процесса конечного деформирования образца в ходе термомеханических испытаний

Е. В. Адамов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Получение достоверных термомеханических характеристик материала при испытании образцов на одноосное конечное растяжение, сопряжено с рядом проблем, одной из которых является нарушение однородности напряженно-деформированного состояния. Искажение характера напряженно-деформированного состояния обусловлено нарушением устойчивости процесса растяжения образца, вследствие возмущений однородности механических свойств материала. Одной из причин неоднородности характеристик материала является неоднородность температурного поля в образце, возникающая при больших перемещениях его торцов. Поскольку визуальное выявление неустойчивости процесса растяжения образца, находящегося в гермокамере невозможно, а обеспечение абсолютно равномерного температурного поля практические невозможно, то очень важно определить допустимый диапазон изменения температур по длине образца, при котором изменение свойств материала не приводит к нарушению устойчивости процесса растяжения.. С этой целью в работе проведен анализ устойчивости процесса конечного деформирования посредством численного моделирования задачи о конечном деформировании в неоднородном температурном поле. Для решения задачи использовался метод пошагового нагружения в сочетании с МКЭ для построения разрешающих соотношений тепловой задачи и задачи о напряженно-деформированном состоянии образца. Соответствующая МКЭ модель была построена на основе вариационного принципа Журдена и определяющих соотношений, представляющих обобщение теории Ильюшина, на случай конечного деформирования [1]. В ходе моделирования процесса растяжения образца из материала - титан ДТ-9. выявлено появление неоднородности напряженно-деформированного состояния. На графике (рис. 1), отражающем изменение характерного напряжения σ_{33}, показано, что диаграмма растяжения в этом случае отличается от эталонной (ожидаемой в ходе эксперимента) и поэтому использование данных, полученных в ходе такого режима реализации эксперимента, может привести к ошибкам в установлении характерных значений механических характеристик для данного материала, а также к не корректной аппроксимации кривой, характеризующей поведение материала под нагрузкой

Анализ результатов численного моделирования показывает, что до 10% деформирования неоднородность распределения температуры не успевает сказываться на распределении напряжений по объему образца. Однако уже при удлинении образца до уровня 20% появляется осциллирующая неоднородность осевого напряжения, которая копирует неоднородность формы образца, отраженную на рис. 2.

Появление зародышей шеек приводит к неустойчивости процесса и при растяжении, соответствующем удлинению в 30% происходит резкое нарушение однородности протекания процесса растяжения, которое характеризуется появлением формы соответствующей, резкому утонению основного тела образца при сохранении практически неизменной формы стержня возле одного из захватов. В то же время, если изменение температуры по длине образца не превысит 5%, то появляющиеся возмущения не приводят к развитию шеек и однородность процесса растяжения сохраняется. Таким образом предложенная модель может быть использована для при проектировании эксперимента для выявления условий его проведения, в рамках которых процесс деформирование остается устойчивым

[1] Маркин А. А. Нелинейная теория упругости (учебное пособие). — Тула: 2001.

УДК 531.36

Устойчивость системы тягач-полуприцеп при движении под уклон

М. М. Амфу

Французская Национальная Школа Мостов и Дорог (ENPC, Париж), Вычислительный Центр им. А. А. Дородницына РАН (Москва)

Уже несколько десятилетий как большинство грузового транспорта совершается по автострадам континентального масштаба, по очень разным рельефам. Железнодорожная перевозка не способна обеспечить перевозку всего груза, и не является достаточно мобильной. Из-за интенсивного развития автомобильных перевозок возникла необходимость исследования устойчивости составных грузовиков, по статистике наиболее подверженных авариям, на горных дорогах. В этом исследовании изучается устойчивость системы тягач-полуприцеп при движении на спуске под уклон. За основу мы берём статью [1] с заменой сцепного устройства типа шарнира Гука на наиболее распространенное сцепное устройство типа “пятое колесо”. Чтобы сохранить постоянную скорость на спуске, у водителя есть две возможности: использовать тормоз, или переключиться на пониженную передачу и тормозить двигателем. Последний вариант является приемлемым решением, однако в случае длинных спусков становятся неэффективным из-за перегрева тормозов. Другой и основной недостаток этого вида торможения состоит в том, что тормозятся только ведущие колёса, и из-за расторможенности прицепа развивается неустойчивость движения типа автоколебаний. В работе получены диаграммы устойчивости при различных режимах движения. Результаты сопоставляются с полученными в [1].

[1] Шейдл Р., Стриберски А., Трогер Х., Земан К. Non linear stability behavior of a tractor-semitrailer in downhill motion. *Vehicule System Dynamics*. — 1984. — **13**. — 509–522.

УДК 511.348

Обобщение теоремы И. М. Виноградова о представлении нечетного N суммою трех простых чисел

И. А. Анамат

Донецкий национальный университет

Данная работа посвящена исследованию вопроса о представлении достаточно большого натурального N суммою простых чисел. Целью работы был вывод асимптотической формулы для числа решений уравнения

$$kp_1 + lp_2 + mp_3 = N \tag{1}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3. При фиксированных натуральных числах k, l, m.

Сначала находилась аналитическая формула числа представлений натурального N суммою простых чисел [4].

Лемма 1. *Пусть $J(N)$ — число решений в простых числах уравнения (1). Тогда*

$$J(N) = \int_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)S_3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha \tag{2}$$

Где $S_1(\alpha) = \sum\limits_{p\leqslant N} e^{2\pi ik\alpha p}$, $S_2(\alpha) = \sum\limits_{p\leqslant N} e^{2\pi il\alpha p}$, $S_3(\alpha) = \sum\limits_{p\leqslant N} e^{2\pi im\alpha p}$.

Для дальнейшего доказательства использовался круговой метод Г. Харди, Д. Литтлвуда, С. Рамануджана и И. Виноградова [3]. Данный метод состоит в том, что из $J(N)$ выделяется предполагаемый главный член асимптотической формулы для величины $J(N)$ при $N \to \infty$. Для этого интервал интегрирования [0,1) в (2) разбивается несократимыми рациональными дробями (дроби Фарея) [1], [2], на непересекающиеся интервалы; сумма интегралов по интервалам, отвечающим дробям с малыми знаменателями, и дает предполагаемый главный член. Также использовалась теорема И. М. Виноградова об оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами [2].

Теорема 1. *Для числа $J(N)$ справедлива асимптотическая формула*

$$J(N) = \sigma(N)\frac{I(N)}{\ln^3(N)} + O\left(\frac{N^2}{\ln^4(N)}\right),$$

где

$$\sigma(N)=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\setminus N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right),$$

а $I(N)$ — число решений уравнения $kn_1+ln_2+mn_3=N$ в натуральных числах n_1, n_2, n_3.

[1] Бородин А. И. Теория чисел. — Киев: 1992.

[2] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: 1981.

[3] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М.: 1975.

[4] Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. — М.: 1970.

УДК 517.55

Об ограниченности некоторых интегральных операторов в весовых пространствах аналитических в бидиске функций со смешанной нормой

О. Е. Антоненкова

Брянский государственный университет

Пусть $U^2=\{z=(z_1,z_2):|z_j|<1,\ j=1,2\}$ — единичный бикруг в C^2, T^2 — его остов. $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $\vec{q}=(q_1,q_2)$, $0<p_j,q_j<+\infty$, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\alpha_j>-1$, $j=1,2$, $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2)$, ω_j — положительные функции, суммируемые на $(0,1)$, для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω, q_ω, m_ω, $q_\omega\in(0,1):\ m_\omega\leqslant\frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)}\leqslant M_\omega,\ \forall r\in(0,1),\ \lambda\in[q_\omega,1],\ j=1,2$. Обозначим через $L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ пространство измеримых в U^2 функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})}=$$
$$=\Big(\int_0^1\omega_2(1-r_2)\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^1\omega_1(1-r_1)\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_1e^{i\varphi_1},r_2e^{i\varphi_2})|^{p_1}d\varphi_1\Big)^{\frac{q_1}{p_1}}\cdot$$
$$\cdot r_1dr_1\Big)^{\frac{p_2}{q_1}}d\varphi_2\Big)^{\frac{q_2}{p_2}}r_2dr_2\Big)^{\frac{1}{q_2}}<+\infty.$$

Подпространство $L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$, состоящее из голоморфных в U^2 функций обозначим через $A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$, а из 2-гармонических функций — через

$h^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$. В работе мы в явном виде строим линейный ограниченный проектор из пространства $L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ на соответствующее пространство аналитических функций при $1 \leqslant p_j, q_j < +\infty$, и из пространства $h^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ на $A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ при $0 < p_j, q_j < +\infty$, $j = 1, 2$. Введем следующие обозначения. Пусть $K_\alpha(z,\xi) = \frac{\omega_1(1-|\xi_1|)}{(1-\overline{\xi_1}z_1)^{\alpha_1+2}} \cdot \frac{\omega_2(1-|\xi_2|)}{(1-\overline{\xi_2}z_2)^{\alpha_2+2}}$, где $z,\ \xi \in U^2$, $T_\alpha(f)(z) = c(\alpha) \int\limits_{U^2} K_\alpha(z,\xi) f(\xi) dm_4(\xi)$, $\vec{\omega}_\alpha = (\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2})$, $\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t) \cdot \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)}\right)^{q_j}$, $t \in (0,1)$, $\alpha_\omega = \frac{\log m_\omega}{\log q_\omega}$, $j = 1, 2$. Справедливы следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p_j, q_j < +\infty$, $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $j = 1, 2$. *Если* $f \in L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$, *то* $T_\alpha(f) \in A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)$, *при этом имеет место оценка* $\|T_\alpha(f)\|_{A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)} \leqslant c\|f\|_{L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})}$.

Результаты такого типа для пространств гармонических в полупространстве функций установлены в работе [2] другим методом.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+1}{q_j} + \frac{1}{p_j} - 2$, *тогда при всех наборах* $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$, $0 < p_j, q_j < +\infty$, $j = 1, 2$ *оператор* $T_\alpha(f)$ *отображает пространство* $h^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ *на пространство* $A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)$, *причем* $\|T_\alpha(f)\|_{A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)} \leqslant c\|f\|_{h^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})}$.

Аналог Теоремы 1 и Теоремы 2 получен нами при всех n. В работе применяются методы разработанные в статье [1].

[1] Шамоян Ф. А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций. *Сиб. мат. журн.* — 1990. — **31**, № 2. — 197–215.

[2] Taibelson M. On the theory of Lipschits spaces of distribution on Euclidian n spaces. *II, Journ. Math. Mechanics.* — 1964. — **13**. — 407–480.

УДК 517.55

О первопорядковой определимости в транзитивных модальных логиках предикатов

С. А. Астрецов

В работе рассматриваются модальные формулы в сигнатуре с одноместными предикатными символами, построенные с помощью стандартных логических связок,кванторов и модальности $\Box$. Модальные формулы интерпретируются в шкалах Крипке с постоянной областью и транзитивным отношением. Таким образом рассматривается модальная логика $QK4B$ — модальная логика предикатов, полученная из классической добавлением схем аксиом

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B),$$

$$\Box A \to \Box\Box A,$$

$$\forall x \ \Box A \to \Box \ \forall x \ A,$$

и правила $\frac{A}{\Box A}$.

Модальная формула φ соответствует классической формуле α первого порядка в сигнатуре с одним одноместным предикатом R и двумя сортами переменных: "миры" $(u, v...)$ и "индивиды" $(a, b...)$, такие что, для любой предикатной шкалы, общезначимость φ равносильна истинности α. φ называется первопорядково определимой (или элементарной), если она соответствует некоторой классической формуле.

Теорема 1. *Формулы*

$$\Box \ \exists x \Diamond \, p(x) \to \exists x \Box \Diamond \, p(x),$$

$$\Box \ \exists x \Box \, p(x) \to \exists x \Box\Box \, p(x)$$

не элементарны.

Следствие. *Формулы*

$$\Box \ \exists x \Diamond \Box \Diamond \, p(x) \to \exists x \Box \Diamond \, p(x),$$

$$\Box \ \exists x \Box^k \, p(x) \to \exists x \Box\Box^k \, p(x)$$

не элементарны.

Теорема 2.

1) Формула

$$\Box^k \Box \exists x\ p(x) \to \Box^k \exists x \Box p(x),$$

соответствует

$$(\forall a \forall b a = b) \vee \forall u((\exists v\ vR^k u) \to (\forall w\ (uRw \to u = w)).$$

2) Пусть N - положительная модальность (последовательность состоящая из $\Box$ и $\Diamond$) содержащая $\Diamond$, тогда

$$N \Box\ \exists x\ p(x) \to N \exists x \Box\, p(x),$$

соответствует

$$(\forall a \forall b a = b) \vee \forall u\ \exists v\ uRv(\forall w\ (vRw \to v = w))$$

Отметим что в пропозициональном случае для транзитивных логик формулы вида $M\,p \to N\,p$, где M и N положительные модальности, являются элементарными [2]. Полученный результат показывает, что в предикатном случае это свойство не сохраняется, даже на простых формулах, пропозиционный фрагмент которых есть $K4$.

[1] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal logic. — Oxford: 1997.

[2] Van Benthem J. Modal reduction principles. — *Journal of symbolic logic.* — 1976. — **41**. — 301–311.

[3] Van Benthem J. F. A. K. Modal logic and classical logic. — Bibliopolice, 1983.

УДК 517.11

Об одной задаче М. Нива

М. А. Бабенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть A — целочисленная матрица $m \times n$. Построим по ней матрицу $(m-1) \times (n-1)$; её элементы — суммы четырех соседних элементов в A (окно 2×2). Можно ли по S за полиномиальное время восстановить A (найти один из прообразов)? Эта задача была поставлена М. Нива для случая, когда элементами матрицы A являются нули и единицы. Оказывается, что в этом случае (и даже в более общем, когда матричные элементы — целые числа в данном интервале) полиномиальный алгоритм существует. С другой стороны, для «окна» 2×3 аналогичная задача оказывается NP-полной.

Теорема 1. *Бинарная задача о 2×2-суммах разрешима за полиномиальное время. Более того, в модели вычислений с произвольным доступом к памяти существует алгоритм, решающий ее за время $O(mn)$.*

Теорема 2. *В модели вычислений с произвольным доступом к памяти существует алгоритм, решающий задачу о 2×2-суммах для целочисленных матриц с элементами в диапазоне от 0 до U_{ij} (входом являются матрицы сумм S и матрица верхних ограничений U) за время $O(mn(m+n)(1+\min U_{ij}))$.*

Пусть в задаче с верхними ограничениями элементы матриц U и S заданы в унарной записи. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 3. *Задача о 2×2-суммах с верхними ограничениями разрешима за полиномиальное время.*

Теорема 4. *Аналогичная задача, в которой рассматриваются 2×3-суммы (исходные данные — матрица сумм для окон высоты 2 и ширины 3 и матрица ограничений в унарной записи), является NP-полной.*

УДК 628.517

Квадратичный операторный пучок задачи о динамическом гасителе колебаний с катарактом

И. А. Базов

Ростовский государственный университет путей сообщения

Описание конструкций динамического гасителя колебаний с катарактом в роли вязкостного демпфера колебаний приведно в [2]. Разыскивая, как обычно решение задачи о свободных колебаниях в виде $x = qe^{\lambda t}$, где $x = (x_1,\, x_2)^T$, $q = (q_1,\, q_2)^T$, $x, q \in \mathbb{R}^2$. Расчетная схема свободных колебаний, в принятых нами безразмерных переменных, имеет вид: $M\lambda^2 + \mathcal{R}\lambda + C = 0$, где $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, μ — отношение масс. Матрица жесткости C имеет вид: $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1+\gamma & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а $\gamma = \frac{f_1}{f_2}$ — отношение жесткости пружин. Структура матрицы Рэлея следующая: $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$, здесь β — безразмерный коэффициент вязкого трения.

Таким образом, задача свелась к типичному самосопряжённому квадратичному операторному пучку [1]. Кстати, в [2] не приводится общее исследование спектра, а рассмотрен только конкретный числовой пример, отвечающий малой вязкости. В настоящей работе проводится полное исследование расположения собственных чисел (СЧ) в комплексной плоскости. Специфической особенностью задачи является то, что оператор Рэлея $\mathcal{R}$ имеет не нулевое ядро, что оказывает специфическое влияние на расположение спектра. В работе доказана теорема о затухании: $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Установлено достаточное условие колебательности режимов (мод). Аналогичная оценка для условия апериодичности ($\operatorname{Im}\lambda = 0$) установлена быть не может в силу специфики оператора $\mathcal{R}$. Установлены возможности возникновения следующих ситуаций: четырехкратное вещественное СЧ, пара двухкратных вещественных СЧ, комплексно-сопряженная пара кратных комплексных СЧ, трехкратное вещественное СЧ и т.д. Во всех случаях установлена двухкратная полнота в смысле Келдыша базиса из собственных и присоединенных векторов. В заключение отметим, что методом диаграммы Ньютона построены асимптотики СЧ для больших ($\beta \gg 1$) и малых ($\beta \ll 1$) значений коэффициента вязкого трения.

[1] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.

[2] Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика, ч. 3. Динамика несвободной системы и теория колебаний. — М. – Л.: ГТТИ, 1934.

УДК 531.36

Устойчивость стационарных движений одноколесного экипажа и его управляемость

Д. А. Балашов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В последнее время возрос интерес к различным моделям колесных экипажей. В частности, несколько работ, посвященных одноколесным экипажам, было выполнено в Институте механики МГУ. В данной работе исследуется одна из возможных моделей одноколесного экипажа (моноцикла), ранее не рассматривавшаяся. Модель моноцикла представляет собой совокупность нескольких твердых тел, на которую наложены две неголономные связи, так что система имеет шесть степеней свободы.

Определено многообразие стационарных движений моноцикла и проведено его исследование. Простейшими стационарными движениями моноцикла, принадлежащими указанному многообразию, являются прямолинейное качение и верчение.

Найдены достаточные условия неустойчивости этих движений, а также необходимые условия устойчивости, полученные на основе анализа линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Введено управление моноциклом и исследована управляемость системы, линеаризованной в окрестности стационарного движения. При выполнении условий управляемости построен алгоритм управления, обеспечивающий устойчивость рассматриваемого стационарного движения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 03-01-00194).

УДК 531.36

О механических системах с односторонними неголономными связями

С. Н. Березинская

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматриваются системы с односторонними неголономными связями, т. е. с такими ограничениями на движение системы, которые не могут быть представлены в виде задания какой-либо области в конфигурационном пространстве. Исследуются линейные неголономные ограничения, задаваемые в локальных координатах $x \in \mathbf{R}^n$ неравенствами вида $C(x,t)\dot{x} + d(x) \leqslant 0$, возникающими, например, при скольжении одностороннего конька. Другой вид ограничений — это условные связи, возникающие, например, при соударении абсолютно шероховатых поверхностей, которые прокатываются друг по другу без проскальзывания. Формально подобные ограничения можно описать следующей системой: условие $g(x) \leqslant 0$ выполняется всегда, и условие $A(x,t)\dot{x} + b(x,t) = 0$ выполняется, когда $g(x) = 0$. Первое условие запрещает взаимное проникновение тел, а второе описывает качение без проскальзывания при их соприкосновении.

Известные положения теории систем с односторонними связями распространяются на случай неголономных и условных связей. Отдельно формулируется метод Рауса понижения порядка системы для связей этого типа. Доказывается, что в системах с односторонними линейными неголономными связями в общем случае движение носит безударный характер, т.е. при выходе на границу ограничений скачка скорости не происходит.

В качестве примера систем с односторонними линейными неголономными связями рассматривается задача о движении саней Чаплыгина с односторонним коньком. Также исследуется движение этой системы по полуплоскости. Показывается, что движение всегда выходит на периодический или условно-периодический режим.

В качестве примера механической системы с условными связями рассматривается однородный диск на горизонтальной плоскости, движение которого ограничено абсолютно шероховатой прямой. Находятся условия, при которых отскок диска от прямой происходит в заданном направлении (в том числе и в направлении обратном исходному движению).

УДК 539.3

Тензор концентрации напряжений в 3D и 4D армированных композиционных материалах

С. А. Берестова

Уральский государственный технический университет – УПИ

Широкое применение пространственно-армированных композитов в различных областях техники требует разработки аналитических методов прогнозирования их прочности в условиях сложного напряженного состояния. Эта задача тесно связана с задачей определения тензора концентрации напряжений.

Повышения эксплуатационных характеристик изделий из композиционных материалов во многих случаях можно добиться применением армирования по трем и четырем направлениям с равным объемным содержанием волокон каждого направления. Эти материалы весьма перспективны для широкого использования в высоконагруженных элементах конструкций. Рассмотрены 3D и 4D армированные композиты. Композиты, армированные в трех взаимно ортогональных направлениях (3D) имеют существенное превосходство по модулям упругости, как в направлении укладки волокон, так и по главным направлениям упругой симметрии, а композиты, армированные по четырем диагоналям куба (4D) обладают относительно высокой сдвиговой жесткостью в главных плоскостях упругой симметрии.

Непосредственное применение его громоздко и связано с дополнительными трудностями, поэтому привлекаются упрощающие гипотезы, либо проводят численные расчеты.

Предлагаемый аналитический подход к определению тензора концентрации основан на разложении напряжённо-деформированного состояния на собственные упругие состояния, что облегчает аналитическое представление критерия.

Существенно различные механические свойства армирующих волокон и матрицы обусловливают высокую анизотропию как деформативных, так и прочностных свойств композитов. В данной работе геометрия разнородных областей представлена в виде пространственно ориентированных трансверсально изотропных элементов. Неоднородность свойств обусловлена существенным различием свойств волокон и матрицы, разными направлениями осей волокон в структурных элементах, а также ориентацией самих структурных элементов.

Относительное объемное содержание волокон для каждого направления армирования одинаково. Материал матрицы и волокна — изотропен.

Упругие свойства матрицы и волокон задаются объемными и сдвиговыми модулями. Эффективные свойства композита, обладающего кубической симметрией, определяются тремя упругими константами: объемным модулем, а также модулями сдвига в плоскости, проходящей через оси симметрии второго и четвертого порядка, в направлениях осей второго и четвертого порядка соответственно.

Известно, что средние напряжения в компоненте композиционного материала определяются их относительным объемным содержанием, упругими характеристиками компонент и композита в целом.

В основе аналитического подхода лежит ортогональное разложение, предложенное Я. Рыхлевским, тензоров второго и четвертого рангов в шестимерном пространстве симметричных тензоров напряжений — деформаций по ортонормированному базису. Элементы тензорного базиса соответствуют одному напряженному состоянию всестороннего сжатия и пяти состояниям чистых сдвигов.

Для аналитического решения задачи о распределении напряжений в композите, которое зависит от упругих свойств волокон, матрицы и композита в целом, а также от ориентации и объемной концентрации волокон, Для изучения распределения напряжений в зернах поликристалла привлекаются дополнительные, упрощающие модель гипотезы, либо все сводится к компьютерному моделированию. Для аналитического решения задачи о распределении напряжений необходимо использование тензорных методов, что связано со значительными трудностями при расчетах. В работе предлагается явный аналитический вид компонент тензора концентрации напряжений, который связывает макронапряжения с напряжениями в волокнах или в матрице. Исследование распределения упругих напряжений в композите выполняется с использованием понятия собственных упругих состояний, являющихся ортонормированным базисом в шестимерном пространстве симметричных тензоров напряжений и деформаций. Данный подход позволяет свести тензорные равенства к скалярным соотношениям, что намного облегчает аналитические расчеты.

При получении выражений для компонент тензора концентрации напряжений не вводились какие-либо упрощающие гипотезы, следовательно, полученные выражения являются точными и могут использоваться для оценки прочностных свойств пространственно-армированных композитов. В дальнейшем явный вид тензора концентрации позволяет внести физически-обоснованные уточнения в феноменологические модели пластичности и прочности в механике микронеоднородных сред.

УДК 517.956

О трехмерном операторе Шредингера с узкой потенциальной ямой

А. Р. Бикметов

Башкирский государственный педагогический университет

Пусть Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$, λ_0 — простое собственное значение, а ψ_0 — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция краевой задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \quad x \in \Omega, \qquad \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Изучается возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon + V\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon \quad x \in \Omega, \qquad \psi_\varepsilon = 0 \quad x \in \partial\Omega, \tag{1}$$

где $V(t)$ — финитная, бесконечно дифференцируемая функция, x_0 — некоторая фиксированная точка, лежащая в Ω, $0 < \varepsilon \ll 1$. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ к λ_0 сходится одно и, к тому же, простое собственное значение λ_ε краевой задачи (1). Методом согласования асимптотических разложений построена асимптотика λ_ε, ψ_ε. Она имеет вид:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^3\lambda_3 + \dots, \quad \lambda_3 = \frac{\psi_0^2(x_0)}{2}\langle V\rangle, \tag{2}$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \varepsilon^3\psi_3(x) + \dots, \qquad \text{при } |x - x_0| > \varepsilon^{1/2},$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i P_i(\xi) - \varepsilon^2\frac{\psi_0(x_0)}{4\pi\rho}\langle V\rangle + \dots, \qquad \text{при } |x - x_0| < 2\varepsilon^{1/2},$$

где $\langle V\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^3} V(t)\,dt$, $\xi = x\varepsilon^{-1}$, $P_i(x)$ — коэффициенты разложения функции ψ_0 в ряд Тейлора в точке $x = x_0$, $\rho = |\xi|\varepsilon^{-1}$, а функция ψ_3 — решение краевой задачи

$$-\Delta\psi_3 = \lambda_0\psi_3 + \lambda_3\psi_0 \quad x \in \Omega\backslash\{x_0\}, \qquad \psi_0 = 0 \quad x \in \partial\Omega \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-01-00693).

с асимптотикой: $\psi_3(x) \sim -\frac{\psi_0(x_0)}{4\pi r}\langle V\rangle$ при $x \to x_0$. Значение λ_3 в (2) определяется из условия разрешимости краевой задачи (3).

[1] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.

УДК 517.51

Приближение суммами Фурье функций с непрерывной производной заданного порядка ограниченной вариации

В. С. Бирюкова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть функция f периода 2π имеет непрерывную производную в смысле Вейля порядка $r \geqslant 0$ ограниченной вариации. Тогда, как доказано С. М. Никольским [2], справедлива оценка

$$\|f - S_n(f)\|_{\mathbb{C}} = o(n^{-r}), \quad n \to \infty.$$

Подобную задачу для класса $H(\omega)\bigcap V$ непрерывных функций, вариация которых не превосходит числа V, а модуль непрерывности — выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(\delta)$, рассмотрела В. Г. Коминар [1]. Ею получено асимптотическое равенство при $n \to \infty$:

$$\sup_{f\in H(\omega)\bigcap V} \|f - S_n(f)\|_{\mathbb{C}} = \frac{2}{\pi^2}\log\left(2 + \frac{V}{\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right)\sin z\,dz + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Рассмотрим класс $W^r_\alpha[H(\omega)\bigcap V]$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, функций $f(x)$, представимых в виде

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00787) и программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-1549.2003.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) D_\alpha^r(t)\, dt, \quad D_\alpha^r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^r},$$

где $\varphi(x) \in H(\omega) \bigcap V$.
Тогда при $n \to \infty$ справедлива оценка

$$\sup_{f \in W_\alpha^r[H(\omega) \bigcap V]} \|f - S_n(f)\|_{\mathbb{C}} =$$
$$= \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \log \left(2 + \frac{V}{\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)} \right) \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z\, dz +$$
$$+ O\left(n^{-r} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

[1] Коминар В. Г. Ряд Фурье непрерывной функции ограниченной вариации. В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций — М. 1961. — 197–201.

[2] Никольский С. М. Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации. *Известия АН СССР, серия матем.* — 1949. — **13**. — 513–532.

УДК 531.8

О влиянии угловой скорости верчения на кинематические влияния железнодорожной колесной пары

О. Н. Богданов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Угловой скоростью верчения называется нормальная к поверхности качения составляющая угловой скорости колесной пары.

Изучается вопрос о боковом движении железнодорожного вагона. В качестве простейшей модели рассматривается экипаж, образованный одной колесной парой и корпусом. Предполагается, что движение колесной пары происходит в зоне свободного хода, без выхода одного из колес на гребень. Касательные составляющие контактных сил описываются с учетом микропроскальзывания точек контакта и угловой скорости верчения колесной пары.

Проведено построение вырожденной по А. Н. Тихонову математической модели, описывающей кинематические виляния. В случае постоянных и равных друг другу по величине углов конусности колес в точках контакта проведен анализ устойчивости.

[1] Копылов И. А., Новожилов И. В. Модель поперечных колебаний железнодорожного поезда. *Известия РАН. Механика твердого тела.* — 1998. — № 2. — 27–35.

[2] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967.

[3] Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1995.

[4] Новожилов И. В., Филиппов В. Н. К оценке условий вкатывания гребня железнодорожной колесной пары на головку рельса. *Известия РАН. Механика твердого тела.* — 2002. — № 5. — 21–29.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 04-01-00759.

УДК 531.8

Представления функциональными интегралами решения задачи Коши – Дирихле для уравнения теплопроводности в области компактного риманова многообразия

Я. А. Бутко

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

В области G компактного риманова многообразия K с гладкой границей ∂G рассматривается задача Коши – Дирихле для уравнения теплопроводности $\frac{\partial f}{\partial t}(t,q) = (-\frac{1}{2}\Delta_K f)(t,q) + V(q)f(t,q)$ с начальным условием $f_0(q)$ класса $\mathbf{C}(\bar{G})$ и краевыми условиями $f(t,q) = 0$, $q \in \partial G$, $t \geqslant 0$. Δ_K — оператор Лапласа – Бельтрами на K.

Находятся представления решения задачи Коши – Дирихле в виде пределов конечнократных интегралов. Эти пределы совпадают с интегралами по мерам гауссовского типа W_G^q и $W_G^{q,s}$ на пространствах непрерывных функций, принимающих значения в области G многообразия. Здесь W_G^q — мера, порождаемая начинающимся в точке q броуновским движением в области G с поглощением на границе. $W_G^{q,s}$ — мера, определение которой аналогично определению меры Фейнмана, соответствующей задаче Коши – Дирихле для уравнения Шрёдингера в области многообразия (см. [1]). При этом конечномерные аппроксимации интегралов по каждой из рассматриваемых мер содержат задаваемые явно функции (во втором случае — зависящие от геометрических характеристик многообразия,) а не символы для невыражающихся через элементарные функции переходных вероятностей случайного процесса, соответствующего броуновскому движению.

В доказательстве результатов работы используется теорема Чернова [2], обобщающая известную теорему Троттера, а также некоторые асимптотики, найденные в работе [3] и характеризующие связь геометрических свойств многообразия со значениями интегралов гауссовского типа по этому многообразию.

[1] Смолянов О. Г., Трумен А. Интегралы Фейнмана по траекториям в римановых многообразиях. *ДАН.* — 2003. —**392**, № 2. —174–179.

[2] Chernoff R. P. *J. Func. Anal.* — 1968. — **2**. — 238–242.

[3] Smolyanov O. G., Weizsäcker H .v., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions. *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings.* — 2000. — **29**.

УДК 515.142.275

О носителях максимальных сцепленных систем

Е. В. Вакулова

Петрозаводский государственный университет

Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с функтором суперрасширения λ, а именно, изучению строения носителя максимальной сцепленной системы.

Основные определения, касающиеся ковариантных функторов (в частности, функтора суперрасширения λ), действующих из категории $Comp$ компактов и их непрерывных отображений в ту же категорию, можно найти в [1].

Определение 1. Если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, а X — компакт, то для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель supp a* следующим образом:

$$supp\, a = \cap\{Y \subset X : Y\text{— замкнуто и } a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Определение 2. Пусть X — компакт, ξ — некоторое семейство замкнутых непустых подмножеств в X. ξ — *сцепленная система*, если любые два элемента ξ имеют непустое пересечение. Сцепленная система ξ является *максимальной сцепленной системой (МСС)*, если ξ не содержится ни в какой другой сцепленной системе.

Определение 3. Пусть ξ — МСС, $F \in \xi$. F называется *минимальным по включению элементом* ξ, если из условия $G \in \xi$ и $G \subset F$ следует, что $G = F$.

Исходя из общего определения носителя точки пространства $\mathcal{F}(X)$ в случае, когда рассматривается функтор суперрасширения λ, можно получить определение носителя МСС. Интересен вопрос о том, каким образом устроен носитель произвольной МСС. Известно, что носитель МСС является замыканием объединения ее минимальных по включению элементов. Является ли это объединение замкнутым? Если оно конечно, то замкнутость очевидна. В работе рассмотрен простейший бесконечный случай, когда компакт X — это сходящаяся последовательность. В этом случае ответ на поставленный вопрос снова положителен. Основной результат данной работы — контрпример, показывающий, что объединение всех минимальных по включению элементов МСС может и не быть замкнутым.

[1] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 1988.

УДК 510.51

Сложность проблем автоматного изоморфизма и автоморфизма в автоматных структурах

Н. С. Винокуров

Новосибирский государственный университет

Исследуются автоматные структуры. Все необходимые понятия и факты изложены в [1, 2, 3].

Теорема 1. *Проблема существования автоматного изоморфизма между автоматными структурами Σ_1^0 — полна.*

Следствие 1. *Проблема существования автоматного изоморфизма между автоматными графами Σ_1^0 — полна.*

Теорема 2. *Проблема существования автоматного автоморфизма в автоматной структуре Σ_1^0 — полна.*

Следствие 2. *Проблема существования автоморфизма в автоматной структуре неразрешима.*

Следствие 3. *Проблема существования автоматного автоморфизма в автоматном графе Σ_1^0 — полна.*

[1] Blumensath A., Grädel E. Automatic structures. In: Proc. 15th IEEE symp. on Logic in Computer Science, 2000, 51-62.

[2] Khoussainov B., Nerode A. Automata theory and its applications. — Boston. 2001.

[3] Khoussainov B., Rubin S., Stephan F. Automatic linear orderings and trees. — CMDTS technical report 208, Department of Computer Science, University of Auckland, 2003.

УДК 519.27

Вычисление распределения вероятностей Манделя в квантовой оптике

Н. Н. Витохина

Белгородский государственный университет

Изучается классическая задача квантовой оптики, относящаяся к теории регистрации квантового излучения низкой интенсивности. Пусть ν — случайное число зарегистрированных счётчиком в течение времени T квантов электромагнитного излучения — фотонов. Причём излучение, по физической природе, представляет собой оптический шум. Требуется вычислить распределение вероятностей $P_n = \Pr\{\nu = n\}$.

Математически, на основании известных положений квантовой оптики [1], задача формулируется следующим образом. Вероятность $P_n = \Pr\{\nu = n\}$ представляет собой составное распределение Пуассона

$$P_n \ = \ \mathbb{E}\left(\frac{J^n}{n!}\exp(-J)\right), \tag{1}$$

где случайная величина определяется

$$J = J[z] \ = \ \int\limits_0^T |\zeta(t)|^2 dt$$

и $\zeta(t)$ – траектории случайного комплекснозначного процесса Орнштейна – Уленбека. Процесс $\{\zeta(t)\}$ конструируется на основе пары стохастически эквивалентных и независимых случайных процессов Орнштейна – Уленбека $\{\xi(t); t \in \mathbb{R}\}$ и $\{\eta(t); t \in \mathbb{R}\}$ по формуле $\{\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Распределения вероятностей процессов $\{\xi(t)\}$ и $\{\eta(t)\}$ определяются как распределения вероятностей решений стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi(t) + a\xi(t)dt = \sigma dw(t)\,, \quad d\eta(t) + a\eta(t)dt = \sigma dw(t),$$

где $a > 0, \sigma > 0$, $\{w(t)\}$ – стандартный винеровский процесс, вместе с условием их стационарности. Математическое ожидание в (1) вычисляется по распределению вероятностей процесса $\{\zeta(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Вычисление распределения P_n осуществляется на основе комулянтного разложения для производящей функции $U(x)$, $x \in [0,1]$ для распределения P_n, что позволяет его представить в виде бесконечной последовательности свёрток "пуассоновских" распределений и получать приближения для P_n с гарантированной точностью при $T \to 0$.

[1] Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. — М.: Мир, 1974.

УДК 519.27

О фуксовых системах с разложимой монодромией

И. В. Вьюгин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В данной работе представлен контрпример к следующей задаче, поставленной А. А. Болибрухом [1], относящейся к вопросу о положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта:

Если матрицы монодромии системы имеют блочно-диагональный вид, то верно ли, что эта фуксова система мероморфно эквивалентна прямой сумме фуксовых систем (т.е. такой системе, матрица коэффициентов которой имеет такой же блочно-диагональный вид)?

Представление χ, которое доставляет контрпример к данной задаче, является прямой суммой двумерного представления χ_1 и четырехмерного представления χ_2, которое не может быть реализовано, как представление монодромии никакой фуксовой системы. Представление χ при этом, может быть реализовано как представление монодромии фуксовой системы с пятью особыми точками.

В качестве представления χ_1 выберем представление с образующими: $G_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $G_{-1}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G_i^1 = G_{-i}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

А в качестве представления χ_2 возьмем представление монодромии системы с регулярными особыми точками из примера 3 [2]. Там

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта "Научные школы" НШ-457.2003.01.

же показано, что χ_2 является контрпримером к проблеме Римана-Гильберта и получена локальная структура представления, на свойствах которой и основывается доказательство теоремы 1. Следовательно, доказательство того факта, что χ действительно является контрпримером к данной задаче, называемой "Задача о прямой сумме", завершает следующая теорема.

Теорема 1. *Представление $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ может быть реализовано как представление монодромии фуксовой системы.*

То, что система с монодромией χ не является мероморфно эквивалентной системе, имеющей соответствующий блочно-диагональный вид, следует из того, что мероморфная замена не изменяет монодромии.

[1] Болибрух А. А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. — М.: МЦНМО, 2000.

[2] Болибрух А. А. К вопросу о существовании фуксовых систем с данными асимптотиками. *Тр. МИРАН.* — 1997. — **216**. — 32–44.

УДК 681.3 513

О построении графа размещения

К. В. Вяткина, В. В. Бухвалова

Санкт-Петербургский государственный университет

Множество R прямоугольников на плоскости, стороны которых параллельны осям координат, называется *размещением*, если прямоугольники из R попарно не перекрываются. *Зоной* $Z(r)$ прямоугольника $r \in R$ назовем открытый левый нижний квадрант, построенный из правой верхней вершины r. *Граф размещения* G_R содержит вершину для каждого прямоугольника $r \in R$; две различные вершины p и q соединены дугой, если $p \cap Z(q) \neq \emptyset$.

Размещения естественным образом возникают в задачах раскроя, упаковки и теории расписаний. Понятия размещения и его графа легко обобщаются на случай пространств высших размерностей. Графы размещений и их свойства используются при решении целого ряда задач (см. [1, 2, 3, 4, 5]).

В данной работе мы предлагаем эффективные методы построения графа размещения. На плоскости граф G_R может быть построен методом заметания за время $O(n \log n + |E|)$ при затратах памяти $O(n+|E|)$, где $n = |R|$, а $|E|$ — число ребер G_R; этот алгоритм оптимален в рамках модели деревьев сравнений. В d-мерном пространстве граф размещения можно построить за время $O(n^{2-\frac{1}{d}} + |E|)$ при затратах памяти $O(n+|E|)$ — с использованием kd-деревьев, или же за время $O(n \log^{d-1} n + |E|)$ при затратах памяти $O(n \log^{d-1} n + |E|)$ — с использованием региональных деревьев.

[1] Бухвалова В. В. Задача прямоугольного раскроя: метод зон и другие алгоритмы. — Санкт-Петербург: НИИХ СПбГУ, 2001.

[2] Липовецкий А. И. Свойства прямоугольных укладок. Препринт. — УрО АН СССР, Институт машиностроения, Свердловск, 1988.

[3] Bukhvalova V., Vyatkina K. An optimal algorithm for partitioning a set of axis-parallel rectangles with right-angled cuts. — In: Proc. SIAM Conference on Geometric Design and Computing, Seattle, USA, 2003. — M. Neamtu and M. Lucian (eds), Nashboro Press. Submitted.

[4] Faina L. An application of simulated annealing to the cutting stock problem. *European Journal on Operational Research.* — 1999. — **114**,№ 3. — 542–556.

[5] Vyatkina K. On geometric properties of enumerations of axis-parallel rectangles. — In: Proc. 20th European Workshop on Computational Geometry, Seville, Spain, 2004. To appear.

УДК 517.518.36

Замечание о скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье – Хаара гладких функций

В. В. Галатенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Известно, что коэффициенты Фурье – Хаара непрерывных непостоянных функций не могут стремиться к нулю быстрее, чем последовательность $n^{-3/2}$, то есть что для любой функции $f \in C[0,1]$ $(f(x) \not\equiv \mathrm{const})$ коэффициенты $\hat{f}_n$ разложения этой функции в ряд Фурье по системе Хаара удовлетворяют соотношению $\limsup_{n\to\infty} \left|\hat{f}_n\right| n^{3/2} > 0$ (см. [1, гл. 3, теорема 5]). Сформулированное утверждение означает, что последовательность коэффициентов разложения произвольной непрерывной функции в ряд Фурье по системе Хаара содержит подпоследовательность, достаточно медленно сходящуюся к нулю. Возникает следующий вопрос: обязана ли в этой

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02–01–00420) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1657.2003.1).

последовательности содержаться подпоследовательность $\hat{f}_{n_k}$, сходящаяся к нулю быстрее, чем $n_k^{-3/2}$. Для класса всех непрерывных функций ответ на этот вопрос известен (см. [1, гл. 3, замечание после теоремы 5]): для функции $f(x) \equiv x$ такой подпоследовательности нет. То же верно и для класса непрерывных функций, принимающих в концах отрезка $[0,1]$ одинаковые значения.

Ситуация меняется, если требовать от функции, принимающей в концах отрезка $[0,1]$ одинаковые значения, некоторую гладкость. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1)$ и $\hat{f}_n$ — коэффициенты разложения функции f по системе Хаара. Тогда существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что выполняется соотношение $\hat{f}_{n_k} n_k^{3/2} \longrightarrow 0$ $(k \to \infty)$.*

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C^2[0,1]$, $f(0) = f(1)$ и $\hat{f}_n$ — коэффициенты разложения функции f по системе Хаара. Тогда существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\hat{f}_{n_k} = \underline{\underline{O}}(n_k^{-5/2})$ $(k \to \infty)$.*

[1] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — Москва: АФЦ, 1999.

УДК 517.518.86

Экстремальные свойства алгебраических многочленов в пространстве L_0 на отрезке

П. Ю. Глазырина

Уральский государственный университет

В докладе будут рассмотрены три классических неравенства на множестве $\mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов степени n в пространстве L_0 на отрезке: неравенство братьев Марковых

$$\|P^{(k)}\|_0 \leqslant M(n,k,0)\|P\|_0, \quad P \in \mathcal{P}_n; \tag{1}$$

неравенство разных метрик (неравенство Никольского)

$$\|P\|_q \leqslant K(n,q,0)\|P\|_0, \quad P \in \mathcal{P}_n,\ q > 0; \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 02-01-00783), РФФИ – ГФЕН Китая (№ 02-01-39007), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1347.2003.1).

неравенство треугольника

$$\|P+Q\|_0 \leqslant \kappa(n)\left(\|P\|_0+\|Q\|_0\right), \quad P,\, Q \in \mathcal{P}_n. \tag{3}$$

Здесь $\|P\|_\infty = \max\{|P(t)| :\ -1 \leqslant t \leqslant 1\}$; $\|P\|_q = \left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} |P(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$, $q \in (0,\infty)$; $\|P\|_0 = \lim\limits_{q\to+0} \|P\|_q = \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \ln|P(t)|\, dt\right)$.

Неравенство (1) достаточно подробно изучено для метрик $\|\cdot\|_q$, $q>0$. В 1889–1892 гг. братья Марковы установили, что

$$M(n,k,\infty) = \frac{n^2\cdots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!}.$$

Из работ E. Hill, G. Szegö, J. D. Tamarkin, Н. К. Бари, С. В. Конягина следует, что этот результат переносится в порядковом смысле на случай $0<q<\infty$: $M(n,k,q) \sim n^{2k}$, $n\to\infty$. Из приводимого ниже утверждения видно, что при $q=0$ наилучшая константа в неравенстве (1) растет по n уже как n^k.

Теорема. $M(n,k,0) = n(n-1)\cdots(n-k+1)e^k$, $n,\, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Неравенство (1) обращается в равенство на многочленах* $P(t) = ct^n$ *и только на них.*

Неравенство (2) для метрик $\|\cdot\|_q$, $\|\cdot\|_p$, $0<q,\, p\leqslant\infty$ также имеет богатую историю. В предельном случае $p=0$ автором доказано, что $K(n,q,0) = K(1,nq,0)^n$, найдено значение $K(1,q,0)$ для всех $q>0$ и описано множество экстремальных многочленов. С помощью этого результата получен логарифмический порядок роста по n наилучшей константы $\kappa(n)$ в (3).

УДК 517.938

Вычисление старшего ляпуновского показателя отображений усовершенствованным методом

Д. С. Глызин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В докладе описано и обосновано распространение метода динамической перенормировки на случай отображений. Пусть задано отображение

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,\ x_0 = w\,,$$

где $x_n \in R^m$. Чтобы стандартным образом определить для траектории x_n старший ляпуновский показатель λ_{max}, рассмотрим линеаризованную на этой траектории систему

$$u_{n+1} = a(x_n)\cdot u_n\,,\ u_0 = v\,,$$

в которой $a(x_n) = f'(x)|_{x=x_n}$, $\|v\| = 1$. Тогда по определению

$$\lambda_{max} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\|u_n\|\,.$$

Самый известный алгоритм преодоления трудностей вычисления λ_{max} предложен Бенеттином и состоит в перенормировке решения линейной системы через каждые N итераций. Неудобство этого алгоритма заключается в том, что в общем случае для разных систем следует выбирать разное N, причем критерий этого выбора плохо формализуем: требуется, чтобы за N итераций норма решения u_n не изменилась “слишком сильно”.

Предложенный А. Ю. Колесовым метод динамической перенормировки лишен этого недостатка; применительно к отображениям он заключается в следующем: фиксируем два числа $u_{max} > 1$ и $u_{min} \in (0,1)$. Далее, будем параллельно вычислять очередные итерации исходной и линеаризованной систем до тех пор, пока $\|u_n\|$ не выйдет за пределы отрезка $[u_{min}\,, u_{max}]$, а затем производим перенормировку. Обозначив номер n, при котором произведена m-ая перенормировка за k_m, получим последовательность задач:

$$u^{(m)}_{n+1} = a(x_n)\cdot u^{(m)}_n\,,\ u^{(m)}_{k_{m-1}} = u^{(m-1)}_{k_{m-1}}/\|u^{(m-1)}_{k_{m-1}}\|,\ k_{m-1}\leqslant n\leqslant k_m.$$

Основной результат состоит в следующем:

Утверждение. *Для старшего ляпуновского показателя выполняется равенство:* $\lambda_{max} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m(n)} \ln \|u_{k_i}^{(i)}\|$, *где* $m(n)$ — *количество перенормировок до момента* n.

УДК 517.938

Адельный подход к когерентной формуле Лефшеца

С. О. Горчинский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В алгебраической топологии существует хорошо известная формула Лефшеца о числе неподвижных точек: если $f : X \to X$ автоморфизм компактного ориентируемого n-мерного многообразия X с конечным числом N_f неподвижных точек, причем во всех неподвижных точках якобиан положителен, то

$$N_f = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*|_{H^i(X,\mathbb{Q})}).$$

В алгебраической геометрии широко используются когомологии *когерентных пучков* на алгебраических многообразиях. Возникает вопрос, чему равно *число Лефшеца* $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{Tr}(f^*|_{H^i(X,\mathcal{F})})$ для когомологий когерентного пучка $\mathcal{F}$ на проективном многообразии X. В случае произвольного поля и произвольного автоморфизма f ответ на этот вопрос неизвестен. Однако тогда, когда f является элементом *семейства* автоморфизмов, а именно действия алгебраического тора, удается отыскать аналог левой части формулы Лефшеца, то есть числа неповижных точек. При этом используются *многомерные адели.*

Для полного флага, лежащего на алгебраическом многообразии X, можно определить *многомерное локальное поле*, являющееся обобщением одномерного локального поля, определенного для точки на кривой. Используя конструкцию многомерного локального поля можно построить *адельный комплекс* $\mathbb{A}_X$, который, в свою очередь, обобщает классические адели, определенные для поля рациональных функций на кривой. Кроме того, для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X тоже есть адельный комплекс $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$. Оказывается, что очень многие понятия из алгебраической геометрии удается переформулировать на язык многомерных аделей, например двойственность Серра, классы Черна, группы Чжоу, индекс пересечения.

В частности, когомологии когерентного пучка $\mathcal{F}$ равны когомологиям адельного комплекса $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$. Используя этот факт и то, что действие тора на многообразие X и на пучок $\mathcal{F}$ определяет действие тора на комплекс $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$, на языке аделей удается получить и доказать формулу для соответствующего числа Лефшеца.

УДК 517.938

О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестности особых точек

И. В. Горючкина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Рассматривалось шестое уравнение Пенлеве

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) + \quad (1)$$

$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right],$$

где x — комплексная переменная, $a,\ b,\ c,\ d$ — комплексные параметры, $a,\ b \neq 0$.

Решения уравнения искались в виде

$$y = \tilde{c}_r x^r + \sum \tilde{c}_s x^s,$$

где $r,\ s$ — комплексные показатели степени, $\tilde{c}_r,\ \tilde{c}_s$ — комплексные коэффициенты.

С помощью методов степенной геометрии [1] были получены степенно-логарифмические разложения решений в окрестности особых точек $x = 0,\ x = \infty,\ x = 1$. Приведем один из полученных результатов.

Теорема. *Пусть* $\tilde{c}_1 = (2b + \epsilon\sqrt{-2b + 4bd})/(1 + 2b - 2d)$, $\psi = \sqrt{-2b} - \epsilon\sqrt{1 - 2d}$, $\epsilon = \pm 1$, *а* θ *такое значение* ψ, *что* $\mathrm{Re}(\psi) > 1$. *Если* $\theta \in \mathbb{N}$, *то разложение решения уравнения (1) в окрестности точки* $x = 0$ *имеет вид:*

$$y = \tilde{c}_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} \tilde{c}_k x^k,$$

где коэффициенты $\tilde{c}_k$ для $k \geqslant \theta$ — многочлены от $\ln x$, а для $k < \theta$, коэффициенты $\tilde{c}_k$ — комплексные постоянные.

Замечание. Для уравнения (1) были получены и другие разложения решений в окрестности точек $x = 0$, $x = \infty$, $x = 1$ (см. [2], [3]).

[1] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.

[2] Брюно А. Д., Чухарева И. В. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт № 49. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.

[3] Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plane. — Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2002.

УДК 512.542

О распознаваемости конечных простых ортогональных групп над полями четного порядка по их спектрам

М. А. Гречкосеева, А. В. Васильев

Новосибирский государственный университет

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов. Конечная группа G называется *распознаваемой по ее спектру* (кратко, *распознаваемой*), если для каждой конечной группы H такой, что $\omega(H) = \omega(G)$, имеет место изоморфизм $H \simeq G$.

К настоящему времени известно бесконечно много распознаваемых конечных простых групп (см. список в [1]). Однако, все имеющиеся примеры распознаваемых групп лиева типа имеют ранг, не превосходящий 6. Следующая теорема показывает, что существуют бесконечные по рангу серии конечных простых групп лиева типа, распознаваемых по своим спектрам.

Теорема 1. *Для каждого натурального числа $m > 2$ группы $C_{2^m}(2)$ и ${}^2D_{2^m+1}(2)$ распознаваемы.*

Конечная простая неабелева группа G называется *квазираспознаваемой*, если каждая конечная группа H такая, что $\omega(H) = \omega(G)$, имеет композиционный фактор, изоморфный G.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00495 и 02-01-39005), Совета по грантам президента РФ (НШ-2069.2003.1), гранта СО РАН для коллективов молодых ученых, Постановление Президиума СО РАН N 404 от 06.12.2002, а также программы “Университеты России” (УР.04.01.028.)

Теорема 2. *Пусть m и k — произвольные натуральные числа. Группа G квазираспознаваема в каждом из следующих случаев:*

а) $G = {}^2D_{2^m}(2^k)$;

б) $G = {}^2D_{2^m+1}(2)$ *и* $m > 1$;

в) $G = C_{2^m}(2^k)$ *и* $m > 2$.

Замечание. Вышеупомянутые группы лиева типа изоморфны простым ортогональным группам, а именно: $C_n(2^k) \simeq O_{2n+1}(2^k)$ и ${}^2D_n(2^k) \simeq O^-_{2n}(2^k)$.

[1] Мазуров В. Д. Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов. *Алгебра и логика.* — 2002. — **41**, № 2. — 166–198.

УДК 512.542

Исследование асимптотического поведения решений третьего уравнения Пенлеве методами степенной геометрии

А. В. Гриднев

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

Рассматривается модифицированное третье уравнение Пенлеве

$$-\ddot{w}wt - \dot{w}wt + \dot{w}^2t + w(aw^2 + b) + t(cw^4 + d) = 0, \tag{1}$$

где a, b, c, d — ненулевые комплексные константы.

Для уравнения (1) исследуются степенные асимптотики его решений $w(t)$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.

1) *Пусть* $\xi \overset{\text{def}}{=} b/\sqrt{-d}$, $|\xi|$ *— нечетное число. Тогда уравнение (1) в окрестности точки* $t_0 = 0$ *имеет решения вида*

$$w = c_1 t + \sum_s c_s t^s, \tag{2}$$

где $s \in \{1 + 2m + n|\xi|, \text{целые } m, n \geqslant 0,\ m + n > 0\}$, $c_1 = -d/b$, $c_{1+|\xi|}$ *— произвольная постоянная, а остальные* c_s *однозначно определены.*

2) Пусть $\eta \stackrel{\text{def}}{=} a/\sqrt{c}$, $|\eta|$ — нечетное число. Тогда уравнение (1) в окрестности точки $t_0 = 0$ имеет решения вида

$$w = c_{-1}t^{-1} + \sum_s c_s t^s, \tag{3}$$

где $s \in \{-1 + 2m + n|\eta|, \text{целые } m, n \geqslant 0,\ m + n > 0\}$, $c_{-1} = -a/c$, $c_{1+|\eta|}$ — произвольная постоянная, а остальные c_s однозначно определены.

Теорема 2. *Степенные асимптотики решений уравнения (1) в окрестности бесконечно удаленной точки имеют вид*

$$w_j = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}t^{-k}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{4}$$

где $c_0 = i^j \sqrt[4]{-d/c}$, $c_{-1} = \dfrac{b}{4cc_0^2} - \dfrac{a}{4c}$, $i^2 = -1$, а остальные c_l однозначно определены.

Замечание 1. Все приведенные разложения являются экспоненциальными разложениями для третьего уравнения Пенлеве

$$-w''w + w'^2 + e^z w(aw^2 + b) + e^{2z}(cw^4 + d) = 0. \tag{5}$$

Замечание 2. Ряды (2), (3) абсолютно сходятся для малых $|t|$, что позволяет говорить о существовании классических решений уравнения (1), имеющих соответствующие асимптотики.

Замечание 3. Однозначные разложения (2) при $c_{1+|\xi|} = 0$ и (3) при $c_{1+|\eta|} = 0$ были известны ранее ([3], § 30).

Замечание 4. Ряды (4) являются формальными, они, по-видимому, расходятся.

Замечание 5. Другие возможные степенные асимптотики решений уравнений (1) и (5) содержатся в [2].

[1] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.

[2] Брюно А. Д., Гриднев А. В. Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт № 51. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.

[3] Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plane. — Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2002.

УДК 517.984

О восстановлении обобщенной матрицы Якоби

М. С. Деревягин

Донецкий национальный университет

Блочно-трехдиагональную матрицу

$$H = H_{[0,N]} := \begin{pmatrix} A_0 & \widetilde{B}_0 & & \mathbf{0} \\ B_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \widetilde{B}_{N-1} \\ \mathbf{0} & & B_{N-1} & A_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

назовем обобщенной матрицей Якоби, ассоциированной с последовательностью полиномов $\{\varepsilon_j p_j\}_{j=0}^N$, где A_j – сопровождающая матрица для приведенного вещественного полинома p_j, $k_{j+1} \times k_j$ матрица B_j и $k_j \times k_{j+1}$ матрица $\widetilde{B}_j$ имеют следующий вид

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & b_j \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} b_j \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ (b_j > 0, \ \varepsilon_j = \pm 1).$$

Матрицы вида (1) возникают в теории аппроксимаций Паде и в индефинитной проблеме моментов (см. [1]). Матрица H задает циклический симметрический оператор в некотором пространстве с индефинитным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$. Получены формулы следов для обобщенных матриц Якоби

$$\operatorname{tr} A_0^l = \operatorname{tr} H^l - \operatorname{tr} H_{[1,N]}^l \ (1 \leqslant l < k_0 + k_1).$$

Для одномерных возмущений матрицы H вида

$$H_\tau = H - \tau \langle \cdot, e \rangle_G e, \ e = (\delta_{0i})_{i=0}^n.$$

доказана следующая теорема типа Борга: *два спектра $\sigma(H)$ и $\sigma(H_\tau)$ однозначно определяют обобщенную матрицу Якоби H и параметр τ*. Доказательство основано на использовании формулы следов и метода граничных операторов и абстрактной функции Вейля ([2]).

[1] Derevyagin M., Derkach V. Spectral problems for generalized Jacobi matrices. *Linear Algebra Appl.* — 2004 (to appear).

[2] Derkach V., Malamud M. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem. *J. Math. Sci.* — 1995. — **73**, № 2. — 141–242.

УДК 517.5

Об одной интерполяционной теореме

Р. А. Джандаров

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова

Хорошо известна интерполяционная теорема Марцинкевича – Калдерона в диагональном случае ($p_0 = q_0, p_1 = q_1$) имеющая вид:

Теорема 1. *Пусть* T *— полуаддитивный оператор*, $0 < r_0, r_1 \leqslant \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$,

$$T : L_{p_0 r_0} \to L_{p_0 \infty} \text{ с нормой } M_0 \tag{1}$$

$$T : L_{p_1 r_1} \to L_{p_1 \infty} \text{ с нормой } M_1. \tag{2}$$

Тогда:$T : L_{p\tau} \to L_{p\tau}$ *и* $\|T\| \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}{}_{T:L_{p\tau}\to L_{p\tau}}$ где $1 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$,$1 \leqslant \tau \leqslant \infty$

Как видно из теоремы, если условие (1), (2) заменить на более сильное, т. е. если $T : L_{p_0\tau_0} \to L_{p_0 s_0}$ $s_0 \leqslant \tau_0$, $T : L_{p_1\tau_1} \to L_{p_1 s_1}$ $s_0 \leqslant \tau_0$, то утверждение останется прежним.

Овчинниковым была получена оптимальная интерполяционная теорема:

Теорема 2. *Пусть* T *— полуаддитивный оператор*, $0 < r_0, r_1, s_0, s_1 \leqslant \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$

$$T : L_{p_0\tau_0} \to L_{p_0 s_0} \text{ с нормой } M_0 \tag{3}$$

$$T : L_{p_1\tau_1} \to L_{p_1 s_1} \text{ с нормой } M_1. \tag{4}$$

Тогда $T : L_{p\tau} \to L_{ps}$ *с нормой* $\|T\| \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{s})_+ = (1-\theta)(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{s_0})_+ + \theta(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{s_1})_+$

В данной работе исследуется задача, когда усиление условия (1) можно компенсировать ослаблением условия (2) так, чтобы имело место сильное неравенство:

Теорема 3. *Пусть* $0 < r_0, r_1 \leqslant \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$, $\theta \in (0, 1)$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\beta(1-\theta) = \alpha\theta$ *и линейное отображение* T *удовлетворяет* *условиям:*

$$\sup_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} \frac{2^{\frac{k}{p_0}}}{|k|^{\alpha}} (Tf)^*(2^k) \leqslant M_0 \left\|f\right\|_{L_{p_0 r_0}} \tag{5}$$

$$\sup_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} 2^{\frac{k}{p_1}} \left|k\right|^{\beta} (Tf)^*(2^k) \leqslant M_1 \left\|f\right\|_{L_{p_1 r_1}}. \tag{6}$$

Тогда $\left\|Tf\right\|_{L_p} \leqslant c \left\|f\right\|_{L_p}$.

Получены также и другие интерполяционные теоремы.

УДК 519.21

Уточнение закона повторного логарифма для геометрически взвешенных рядов

С. В. Дильман

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (далее н.о.р.с.в.) с $\mathbf{E}X_0 = 0, \mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 > 0$ и $\xi(\beta) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\beta^n X_n$, где $\beta \in (0,1)$. Обозначим $\tau(\beta) = \mathbf{E}(\xi(\beta)^2)$.

В работе [2] для $\xi(\beta)$ был доказан закон повторного логарифма:

$$\limsup_{\beta\to 1} \frac{\Sigma_{n=0}^{\infty}\beta^n X_n}{\sqrt{2\tau(\beta)LL(\tau(\beta))}} = 1 \text{ п.н.}, \ \liminf_{\beta\to 1} \frac{\Sigma_{n=0}^{\infty}\beta^n X_n}{\sqrt{2\tau(\beta)LL(\tau(\beta))}} = -1 \text{ п.н.}, \tag{1}$$

где $LL(x) = \log\log x$, при $x \geqslant e^e$ и $LL(x) = 1$, при $x < e^e$.

Числовую функцию $\psi(x)$ $(x > 0, 0 < \psi(x) \nearrow \infty)$ назовем универсальной нормировкой для геометрически взвешенных рядов, если для всякой последовательности $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ н.о.р.с.в., $\mathbf{E}X_0 = 0$, $\mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 > 0$, выполняются соотношения

$$\limsup_{\beta\to 1} \frac{\Sigma_{n=0}^{\infty}\beta^n X_n}{\sqrt{\tau(\beta)}\psi(\tau(\beta))} = 1 \text{ п.н.}, \ \liminf_{\beta\to 1} \frac{\Sigma_{n=0}^{\infty}\beta^n X_n}{\sqrt{\tau(\beta)}\psi(\tau(\beta))} = -1 \text{ п.н.}, \tag{2}$$

В данной работе доказано, что функция $\psi(x)$ $(x > 0, 0 < \psi(x) \nearrow \infty)$ является универсальной нормировкой (см. [1]) для геометрически взвешенных рядов тогда и только тогда, когда справедливо соотношение $\liminf_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{\sqrt{2LLx}} = 1$. Кроме того, для более общего класса последовательностей $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ показано, что это условие является

Работа частично поддержана РФФИ, грант № 03-01-00724.

достаточным, для выполнения (2). Тем самым получены обобщения работ [2] и [3].

[1] Булинский А. В., Дильман С. В. Универсальная нормировка в законе повторного логарифма. *Успехи матем. наук.* — 2002. — **57**, № 2. — 193–194.

[2] Bovier A., Picco P. A law of the iterated logarithm for geometric series. *Ann. Probab.* — 1993. — **21**, № 1. — 168–184.

[3] Zhang L.-X. Strong approximation theorems for geometrically weighted random series and their applications. *Ann. Probab.* —1997. — **25**, № 4. — 1621–1635.

УДК 519.21

Оценки первого собственного значения некоторых задач Штурма – Лиувилля

С. С. Ежак

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

Рассматривается следующая задача Штурма – Лиувилля:

$$y''(x) + Q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где $Q(x)$ — функция из класса A_α, где A_α — множество неотрицательных ограниченных функций, удовлетворяющих условию:

$$\int_0^1 Q^\alpha(x)dx = 1, \quad \alpha \neq 0. \tag{3}$$

Решением уравнения (1) будем называть функцию $y(x)$, определенную на $[0, 1]$, такую что $y'(x)$ — абсолютно непрерывна, и уравнение (1) выполняется почти всюду на $(0, 1)$.

Исследуется зависимость первого собственного значения λ_1 этой задачи от потенциала $Q(x)$ при различных значениях α.

Отметим, что подобная задача для уравнения $y''(x)+\lambda Q(x)y(x) = 0$ при условиях (2) – (3) рассматривалась в работе [1].

Из вариационного принципа следует, что первое собственное значение λ_1 может быть найдено следующим образом:

$$\lambda_1 = \inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q,y],$$

где

$$R[Q,y] = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx - \int\limits_0^1 Q(x)y^2(x)dx}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}.$$

Пусть

$$m_\alpha = \inf_{Q(x)\in A_\alpha} \lambda_1, \quad M_\alpha = \sup_{Q(x)\in A_\alpha} \lambda_1,$$

Теорема. *Если $\alpha = 1$, то $m_1 = 3$, $M_1 \leqslant \pi^2$.*

Если $\alpha > 1$, то

$$m_\alpha = \frac{2}{p\left(1+\frac{p}{2}\right)^{\frac{p-2}{p}}} \cdot B^2\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right) - 1, \quad M_\alpha \leqslant \pi^2,$$

где $p = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$, $B(a,b)$ — бета-функция Эйлера; причем существуют функции $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $Q(x) \in A_\alpha$, такие что

$$\inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = m_\alpha, \quad \alpha \geqslant 1.$$

Замечание. Отметим, что $\lim\limits_{\alpha\to 1+0} m_\alpha = m_1 = 3$.

[1] Egorov Yu., Kondratiev V. On Spectral theory of elliptic operators. In: Operator theory. Advances and Applications. — Birkhouser. 1996. — 1–328.

УДК 517.988.6

Степенные и экспоненциальные асимптотические разложения решений второго уравнения Пенлеве

Ю. В. Завгородняя

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

Рассматривается второе уравнение Пенлеве

$$-w'' + 2w^3 + zw + a = 0, \tag{1}$$

где a — комплексный параметр. Для этого уравнения исследуются асимптотики его решений $w(z)$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть параметр уравнения (1) $a = 0$. Тогда для уравнения (1) при $z \to \infty$ имеются асимптотики вида*

$$w = \frac{c}{z^{1/4}} \exp\left[\pm\frac{2}{3}z^{3/2} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2c_l}{3(1-l)} z^{3(1-l)/2}\right], \tag{2}$$

где в квадратной скобке знак берется так, чтобы $\pm\mathrm{Re}z^{3/2} < 0$.

Теорема 2. *Пусть параметр уравнения (1) $a = 0$. Тогда для уравнения (1)*

1) *в окрестности точки $z_0 = 0$ степенные разложения решений имеют вид*

$$w = cz^{-1} + c_2z^2 + c_3z^3 + \sum_{s=5}^{\infty} c_s z^s, \tag{3}$$

где $c = \pm1$, $c_2 = -c/6$, c_3 — произвольное, а остальные c_s однозначно определены;

2) *в окрестности бесконечности степенные разложения решений имеют вид*

$$w = cz^{1/2} + \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^{-3l-5/2}, \tag{4}$$

где коэффициенты c_l однозначно определены. В частности $c = \pm\sqrt{2}/2$, а $c_{-5/2} = -c/16$.

Замечание.

1) Разложения (2) являются формальными разложениями. Они известны, как разложения решений уравнения Эйри [3].
2) Разложения (3), (4) сходятся при достаточно малых $|z|$. По-видимому, они найдены впервые.
3) Асимптотические разложения для случая $a \neq 0$ содержатся в [2].

[1] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.

[2] Брюно А. Д., Завгородняя Ю. В. Степенные ряды и нестепенные асимптотики решений второго уравнения Пенлеве.Препринт N48 — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2003.

[3] Федорюк М. В. Эйри функция. В кн: Математическая энциклопедия, т. 5. — М.: Советская энциклопедия, 1985. — 939–941.

УДК 517.988.6

Индексы особых торических многообразий Фано

Н. Ф. Зак

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Определение 1. Рассмотрим многообразие Фано X, т. е. нормальное многообразие с обильным антиканоническим классом $-K_X$. Индексом X называется число

$$r(X) = \sup\{t : -K_X \equiv_{\mathbb{Q}} t \cdot H\},$$

где H — обильный дивизор Картье, а символ $\equiv_{\mathbb{Q}}$ обозначает численную эквивалентность.

Псевдоиндексом называется индекс пересечения

$$\tau(X) = \min(-K_X, C),$$

где $C \subset X$ — произвольная рациональная кривая.

Ясно, что $\tau(X) = k \cdot r(X)$, где k — некоторое натуральное число, причём уже в случае поверхностей может быть $k > 1$.

Мы будем рассматривать многообразия, допустимые лог-программой минимальных моделей, а именно, многообразия с лог-терминальными особенностями, или, сокращённо, лог-многообразия. Все полные торические поверхности, а также полные торические многообразия с группой Пикара $\mathbb{Z}$ являются таковыми. Для лог-многообразий в определении псевдоиндекса можно рассматривать произвольную кривую $C \subset X$.

Приведём две гипотезы, связанные с r и τ.

Гипотеза 1 (Гипотеза Шокурова). *Множество индексов n-мерных лог-многообразий Фано не имеет точек накопления снизу.*

Гипотеза 2 (Обобщённая Гипотеза Мукаи). *Для неособого многообразия Фано X^n псевдоиндекс τ и число Пикара ρ связаны неравенством $(\tau - 1) \cdot \rho \leqslant n$.*

Первая гипотеза доказана Алексеевым для лог-поверхностей Дель Пеццо (двумерных лог-многообразий Фано), а вторая — разными авторами при малых n или ρ. В связи с первой гипотезой, будет доказана

Теорема 1. *Множество индексов n-мерных торических многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ не имеет точек накопления снизу.*

Пусть X^n — лог-многообразие Фано. Известно, что $\tau(X) \leqslant n+1$. Для торических лог-поверхностей Дель Пеццо мы сформулируем и докажем обобщение этого неравенства, аналогичное неравенству из гипотезы Мукаи. Не исключено, что это обобщение справедливо для произвольных лог-поверхностей Дель Пеццо, а также, в изменённом виде, для лог-многообразий Фано.

Пусть X — лог-поверхность Дель Пеццо. Применив к X лог-программу минимальных моделей, мы получим многообразие $\tilde{X}$ (не обязательно однозначно определённое), которое является либо расслоением над одномерной базой, либо поверхностью с группой Пикара $\mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Пусть X — торическая поверхность Дель Пеццо. Тогда в первом случае справедливо неравенство*

$$\tau(X) \cdot (\rho_{min}(\tilde{X}) + 2) \leqslant 8,$$

а во втором

$$\tau(X) \cdot (\rho_{min}(\tilde{X}) + 2) \leqslant 9,$$

где число $\rho_{min}(\tilde{X})$ равно числу Пикара минимального разрешения особенностей многообразия $\tilde{X}$. Равенство в обоих случаях достигается на бесконечном множестве многообразий.

УДК 517.988.6

Об одном нелинейном эволюционном уравнении

Д. А. Закора

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dw}{dt} = A(t)w + N_0(t, w, w) + f(t), \quad t \in [\tau, T], \quad w(\tau) = w_\tau \qquad (1)$$

в действительном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $A(t)$ — линейная ограниченная оператор-функция (о.-ф.), а о.-ф. $N_0(t, \cdot, \cdot)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) о.-ф. $N_0(t, \cdot, \cdot)$ линейна по второму и третьему аргументу; 2) существует константа C_T такая, что для любых u, $v \in \mathcal{H}$ $\|N_0(t, u, v)\| \leqslant C_T\|u\|\,\|v\|$ при $t \in [\tau, T]$; 3) для любых z, u, $v \in \mathcal{H}$ $(N_0(t, z, u), v)_\mathcal{H} = -(u, N_0(t, z, v))_\mathcal{H}$.

Определение 1. Функцию $w(t) \in C^1([\tau, T]; \mathcal{H})$ назовем решением задачи Коши (1), если она удовлетворяет уравнению и начальному условию из (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1^0 *о.-ф.* $A(t)$ *сильно непрерывна на отрезке* $[\tau, T]$*;* 2^0 *о.-ф.* $N_0(t, \cdot, \cdot)$ *удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и для любых* u, $v \in \mathcal{H}$ $N_0(t, u, v) \in C([\tau, T]; \mathcal{H})$*;* 3^0 $f(t) \in C([\tau, T]; \mathcal{H})$*. Тогда решение задачи* (1) *существует и единственно.*

Введем обозначения (см. [1]):

$$\mathrm{Re}B(t) := \frac{1}{2}(B(t) + B^*(t)), \quad \lambda_M[\mathrm{Re}B(t)] := \sup_{\|\varphi\|=1} (\mathrm{Re}B(t)\varphi, \varphi)_\mathcal{H},$$

где $B(t)$ — линейная ограниченная оператор-функция.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:* 1^0 *о.-ф.* $A(t)$ *сильно непрерывна и ограничена на луче* $[\tau, +\infty)$*;* 2^0 *о.-ф.* $N_0(t, \cdot, \cdot)$ *удовлетворяет условиям 1), 2), 3) (с заменой* T *на* $+\infty$*) и для любых* u, $v \in \mathcal{H}$ $N_0(t, u, v) \in C([\tau, +\infty); \mathcal{H})$*;* 3^0 *функция* $f(t)$ *непрерывна и ограничена на луче* $[\tau, +\infty)$*;* 4^0 *существуют константы* $\gamma > 0$ *и* $t_\gamma \geqslant \tau$ *такие, что* $\lambda_M[ReA(t)] \leqslant -\gamma$ *при* $t \geqslant t_\gamma$*. Тогда решение задачи Коши* (1) *ограниченно, а при* $f(t) \equiv 0$ *— экспоненциально убывает к нулю.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1^0, 2^0, 3^0 *теоремы 2 и еще одно:* 4^0 *существуют* $\xi(t) \in C^1([\tau, \infty); \mathcal{H})$, $\gamma > 0$, $t_\gamma \geqslant \tau$ *такие, что* $\xi(t)$, $\xi'(t)$ *— ограниченны на луче* $[\tau, +\infty)$ *и* $\lambda_M[\mathrm{Re}(A(t) + N_0(t, \cdot, \xi))] \leqslant -\gamma$ *при* $t \geqslant t_\gamma$*. Тогда решение задачи Коши* (1) *ограниченно.*

[1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.

УДК 517.518+517.982

Обобщенные фреймы и системы Рисса

А. А. Захарова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω — пространство со счётно-аддитивной мерой μ.

Определение 1. Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система замкнутых расширяющихся подпространств в H, объединение которых всюду плотно в H. Обобщенная система $\{\mathbf{e}^{\omega}\}_{\omega\in\mathbf{\Omega}}$ состоит из последовательностей $\mathbf{e}^{\omega} = \{e_n^{\omega}\}_{n=1}^{\infty}$, $e_n^{\omega} \in H_n$ и является ортогональной проекцией e_{n+1}^{ω} на H_n.

Обобщим понятия интегрального базиса Рисса и интегрального фрейма(дискретный случай см. [1]) на случай обобщенных ортоподобных систем:

Определение 2. Обобщенная система $\{\boldsymbol{\psi}^w\}_{w\in\Omega}$ называется обобщенным базисом Рисса, если существуют $0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для любого $y \in H_n$, для $\gamma_w^n = (y, e_n^w)$ верно

$$a \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\gamma_w^n|^2 d\mu(w) \leqslant \left\| \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \gamma_w^n \psi_n^w d\mu(w) \right\|^2 \leqslant b \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\gamma_w^n|^2 d\mu(w).$$

Определение 3. Назовём обобщенную систему функций $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}^w\}_{w\in\Omega}$ обобщенным фреймом, если для $0 < a \leqslant b < \infty$ и любых $y \in H_n$

$$a \parallel y \parallel_{H_n}^2 \leqslant \int_{\Omega} |(g, \varphi_n^w)|^2 d\mu(w) \leqslant b \parallel y \parallel_{H_n}^2 .$$

Теорема 1. *Для того чтобы система $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}^w\}_{w\in\Omega}$ была обобщенным фреймом в H, необходимо и достаточно, чтобы нашлось гильбертово пространство $H' \supset H$, и в нём обобщенный базис Рисса $\Psi = \{\boldsymbol{\psi}^w\}_{w\in\Omega}$, такой что*

$$a \left(\int_{\Omega} |\gamma_w|^2 d\mu(w) \right)^{1/2} \leqslant \left\| \int_{\Omega} \gamma_w \boldsymbol{\psi}^w d\mu(w) \right\|_{H'} \leqslant b \left(\int_{\Omega} |\gamma_w|^2 d\mu(w) \right)^{1/2}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ № 02-01-00420.

для любой функции $\gamma_w \boldsymbol{\psi}^w$ *интегрируемой на* Ω *и*

$$\boldsymbol{\varphi}^w = \pi_{H' \to H}(\boldsymbol{\psi}^w), \quad w \in \Omega,$$

где $\pi_{H' \to H}$ *— ортогональная проекция* H' *на* H.

[1] Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. Замечание об описании фреймов общего вида. *Матем. заметки.* — 2002. — **72**, № 6. — 941–945.

УДК 517.518+517.982

Обобщенные плотности квазимер на счетных произведениях римановых многообразий

Л. Н. Захарова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В работе доказываются некоторые свойства обобщенных плотностей [1] квазимер, определенных на некоторых кольцах подмножеств счетного произведения римановых многообразий. Важным примером такой квазимеры является поверхностная мера Фейнмана.

Определяется продакт-мера на кольце цилиндрических подмножеств $\mathbb{R}^\infty$ с прямоугольными основаниями. Показано, что ее обобщенная плотность связана с логарифмической производной меры в смысле Фомина. Для произведения многообразий доказывается независимость сужения обобщенной плотности от выбора вложения в объемлющее пространство с мерой. Также исследована степень неоднозначности восстановления исходной меры по ее обобщенной плотности.

[1] Вайцзеккер Х. фон, Смолянов О. Г. Гладкие кривые в пространствах мер и сдвиги дифференцируемых мер вдоль векторных полей. *Доклады РАН.* — 1994. — **339**, № 5. — 1–4.

УДК 539.3

Конечно-элементное моделирование длинных трубчатых костей человека

Е. Н. Иванов

Ростовский государственный университет

В повседневной жизни длинные трубчатые кости человека подвергаются различным нагрузкам. В ряде случаев действие этих нагрузок может привести к переломам. Существует множество способов лечения переломов костей: консервативный, открытая репозиция, накостный остеосинтез, чрескостный остеосинтез, кортикальный остеосинтез металлами с эффектом памяти формы. При изучении поведения фиксаторов в условиях потерявшей прочность кости возникает необходимость исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и долговечности имплантатов. Проведение прямых экспериментов в области биомеханики очень затруднительно, а в некоторых случаях и невозможно. Метод конечных элементов (МКЭ) дает возможность проводить обширные исследования в биомеханике, учитывать особенности, присущие биомеханическим конструкциям, например, сложную структурную организацию, сложную геометрическую форму, анизотропию и нелинейность упругих свойств.

Целью представленной работы является создание конечно-элементных моделей, исследование прочностных характеристик большеберцовой и лучевой костей, поиск оптимальных размеров фиксаторов и имплантатов из пористого никелида титана на различных этапах костной регенерации. Имплантат использовался для замещения поврежденной в результате травмы костной ткани. Все расчеты проводились с использованием конечно-элементного комплекса ANSYS. Для численного моделирования составлены оригинальные программы для конечно-элементного комплекса ANSYS. Конечно-элементные модели ANSYS, использующие трехмерные конечные элементы с анизотропными материальными свойствами создавались на основе снимков поперечных разрезов костей.

Представлены конечно-элементные модели большеберцовой и лучевой кости, с имплантатом и без, а также предварительные результаты исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (04-01-00759).

УДК 539.8

Управление двигателем автомобиля с целью предотвращения заноса

И. В. Капырин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается занос автомобиля при наезде на “микст”, т.е. на участок дороги с неодинаковыми коэффициентами сцепления для левых и правых колес. Составлена система уравнений, учитывающая динамику кузова, трансмиссии, двигателя и колес автомобиля. С помощью асимптотических методов теории сингулярно возмущенных систем построена приближенная модель, описывающая быстрые составляющие движений. Изучается возможность исключить занос путем управления крутящим моментом двигателя по информации датчиков угловой скорости колес. Получены оценки начальной угловой скорости заноса при различных значениях параметров управления.

УДК 519.21

О слабом решении стохастического дифференциального уравнения со взаимодействием

М. П. Карликова

Институт математики НАН Украины, Киев

Основным объектом исследования является уравнение со взаимодействием:

$$\begin{cases} dx\,(u,\,t) = a\,(x\,(u,\,t)\,,\,\mu_t)\,dt + b\,(x\,(u,\,t)\,,\,\mu_t)\,dw\,(t) \\ x\,(u,\,0) = u \end{cases} \tag{1}$$

где $\mu_t = \mu_0 \cdot x\,(\cdot, t)^{-1}$ (см. [2], [1]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство вероятностных мер в $\mathbb{R}^d$, γ — метрика, отвечающая слабой сходимости (см. [1]). Известно ([2]), что если коэффициенты уравнения 1 удовлетворяют глобальному условию Липшица, то существует единственное сильное решение. В настоящей работе приведено условие существования слабого решения.

Теорема 1. *Пусть x^{α} удовлетворяют уравнениям 1, причем*

$$\|a^{\alpha}(u,\,\mu)\| \leqslant C\,(1+\|u\|)\,,\ \|b^{\alpha}(u,\,\mu)\| \leqslant C\,(1+\|u\|)$$

и семейство $\{\mu_0^{\alpha},\,\alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо компактно в $\mathfrak{M}$. Тогда семейство $\{\mu_{\cdot}^{\alpha},\,\alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо компактно в $C\,([0,\,1]\,,\mathfrak{M})$.

С помощью этой теоремы получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты a, b удовлетворяют условию*

$$\|a\,(u,\,\mu)\| \leqslant C\,(1+\|u\|)\,,\ \|b\,(u,\,\mu)\| \leqslant C\,(1+\|u\|)$$

а, кроме того, являются локально липшицевыми, т. е. для любого $N>0$ существует C_N такая, что при $\|u\| \leqslant N$, $\|v\| \leqslant N$, $\mu_1,\,\mu_2 \in \mathfrak{M}$

$$\|a\,(u,\mu_1)-a\,(v,\,\mu_2)\|+\|b\,(u,\mu_1)-b\,(v,\,\mu_2)\| \leqslant C_N\,(\|u-v\|+\gamma\,(\mu_1,\,\mu_2))$$

Тогда уравнение 1 имеет слабое решение.

[1] Dorogovtsev A. A. Properties of the random measures. *Theory of Stochastic Processes*. — 2000. — **6(22)**, № 1-2. — 26–33.

[2] Dorogovtsev A. A., Kotelenez P. Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic differential equations. Finite mass. — Preprint No. 97-145, CWRU, Ohio.

УДК 519.21

Степенные и логарифмические асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве

Е. С. Карулина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Рассматривается пятое уравнение Пенлеве

$$w'' = w'^2\left(\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right)-\frac{w'}{z}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left(aw+\frac{b}{w}\right)+c\frac{w}{z}+ \\ + d\frac{w(w+1)}{w-1}, \quad (1)$$

где a, b, c, d — ненулевые комплексные константы. Вычисляются все степенные асимптотики его решений в окрестности нуля, имеющие вид

$$w = c_r z^r + \sum c_s z^s,$$

где r, s, $c_r = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, c_s — многочлены от $\ln z$ неотрицательных степеней. При этом используются методы степенной геометрии (см. [1]).

Пусть $\tilde{c} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, а ξ — то значение корня $\pm\sqrt{2a(1-\tilde{c})(1-4\tilde{c})}$, у которого действительная часть неотрицательна.

Теорема.

1) *Если* $\mathrm{Re}(\xi) = 0$, *то у уравнения (1) в окрестности точки* $z_0 = 0$ *существует решение вида:*

$$w = \tilde{c} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \text{ где } c_k = \mathrm{const}; \tag{2}$$

2) *если* $\mathrm{Re}(\xi) \neq 0$ *и* $\xi \notin \mathbb{N}$, *то у уравнения (1) в окрестности точки* $z_0 = 0$ *существует решение вида:*

$$w = \tilde{c} + \sum_{s} c_s z^s, \tag{3}$$

где $c_s = \mathrm{const}$, $s \in \{l + m\xi : l, m \in \mathbb{Z},\ l,\ m \geqslant 0,\ l + m > 0\}$;

3) *если* $\xi \in \mathbb{N}$, *то уравнение (1) в окрестности точки* $z_0 = 0$ *имеет формальное решение вида:*

$$w = \tilde{c} + \sum_{l=1}^{\infty} c_l z^l. \tag{4}$$

Здесь c_l — многочлены от $\ln z$ неотрицательных степеней, причем при $l = \xi$ коэффициент c_l является линейной функцией от $\ln z$ с произвольным свободным членом; коэффициенты c_s, c_k определяются однозначно, а при $k = \xi$ коэффициент c_k произвольный.

Замечание. Разложения (2), (3) и (4) в случае, когда они являются разложениями по целым степеням z, найдены в [2]. Уравнение (1) допускает и другие разложения решений (в том числе формальные), которые указаны в [2], [3].

[1] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.

[2] Брюно А. Д., Карулина Е. С. Степенные разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт № 50. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.

[3] Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plane. — Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2002.

УДК 517.9

Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений с малым запаздыванием

И. С. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

На отрезке $[0, T]$ рассматривается уравнение с запаздыванием

$$\varepsilon\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \varepsilon\delta(t)), \varepsilon), \ x \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

$$x(s) = a(s), \text{ при } s \in [-\varepsilon \max_{t\in[0,T]} \delta(t), 0]. \tag{2}$$

Будем считать, что функции F и a является достаточно гладкими. Пусть кроме того выполнены следующие условия.

I. При каждом $t \in [0, T]$ вырожденное уравнение, получаемое из (1) при $\varepsilon = 0$, имеет единственный достаточно гладкий корень $y_0(t)$.

II. Все решения характеристического уравнения

$$\det \Big[\lambda E - F_2(t, y_0(t), y_0(t), 0) - e^{-\lambda\delta(t)} F_3(t, y_0(t), y_0(t), 0) \Big] = 0$$

расположены в левой комплексной полуплоскости при каждом $t \in [0, T]$. Здесь E — единичная матрица, а через F_i обозначена частная производная функции F по i-тому аргументу.

Ставится задача нахождения асимптотики решения (1)-(2) на отрезке $[0, T]$. Для исследования будем использовать метод, базирующийся на методе пограничных функций, представленном в [1]. Решение (1)-(2) ищется в виде суммы регулярного и пограничного рядов:

$$x(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots + \Pi_0 y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\Pi_1 y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \ldots. \tag{3}$$

Делая такую замену в (1)-(2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем последовательно получать алгебраические уравнения для определения $y_k(t)$ и дифференциальные уравнения с запаздыванием для определения $\Pi_k y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. В силу условий I–II все уравнения будут иметь единственное решение, а ряд (3) будет асимптотическим приближением решения задачи (1)-(2), т. е.

$$\max_{t\in[0,T]} \left\| x(t) - \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \left(y_k(t) + \Pi_k y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right\| = O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$$

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.

УДК 517.5

Интерполяция в ядре дифференциального оператора

В. Э. Ким

Институт математики с ВЦ Уфимского НЦ РАН

Обозначим: $[\rho, \sigma]$ — класс целых функций порядка $< \rho$ или порядка ρ и типа $\leqslant \sigma$, $[\rho^*, \sigma^*)$ — класс целых функций порядка $< \rho^*$ или порядка ρ^* и типа $< \sigma^*$, где $\rho > 1$, $\sigma > 0$, $\rho^* = \rho/(\rho-1)$, $\sigma^* = (\rho\sigma)^{1-\rho^*}/\rho^*$. Пусть $\varphi \in [\rho^*, \sigma^*)$, $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda + 2\pi)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$; $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — все нули φ, лежащие в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < 2\pi$ (все нули простые). Пусть Φ — каноническое произведение с нулевым множеством Λ, $c_m = \Phi^{(m)}(0)/(i^m m!)$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим на $[\rho, \sigma]$ дифференциальный оператор бесконечного порядка $M_\Phi(f) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m f^{(m)}$. Рассмотрим последовательности $\Omega_1 = \{e^{-i\lambda_k}\}_{\lambda_k \in \Lambda, \operatorname{Im}\lambda_k \geqslant 0}$, $\Omega_2 = \{e^{i\lambda_k}\}_{\lambda_k\in\Lambda, \operatorname{Im}\lambda_k<0}$. Обозначим через $n_1(r)$, $n_2(r)$ соответственно число точек из Ω_1, Ω_2 в круге $|z| \leqslant r$. Обозначим

$$\tau_s = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{(\ln r)^{\rho^*}} \int_1^r \frac{n_s(x)}{x} dx, \ s = 1, 2.$$

Введем функции $\varphi_k(\lambda) = \varphi(\lambda)/(1 - e^{\lambda-\lambda_k})$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим: $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — коэффициенты ряда Фурье функции φ, $\{b_{n,k}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — коэффициенты ряда Фурье функции φ_k.

Теорема. *Пусть* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$: $\sup\limits_n |a_n| e^{-(\sigma+1/j)|n|^\rho} < \infty, \forall j \in \mathbb{N}$; $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n a_{n+m} = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. *Если выполняются условия*

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ \operatorname{Im}\lambda_k \geqslant 0}} \frac{\ln\Bigl|\prod\limits_{n\neq k}\Bigl(1 - \frac{e^{i\lambda_n}}{e^{i\lambda_k}}\Bigr)\Bigr|}{|\operatorname{Im}\lambda_k|^{\rho^*}} = \tau_1, \quad \lim_{\substack{k\to\infty \\ \operatorname{Im}\lambda_k < 0}} \frac{\ln\Bigl|\prod\limits_{n\neq k}\Bigl(1 - \frac{e^{i\lambda_k}}{e^{i\lambda_n}}\Bigr)\Bigr|}{|\operatorname{Im}\lambda_k|^{\rho^*}} = \tau_2,$$

то $\exists!\, f \in \ker M_\Phi : f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, *причем*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(iz\lambda_k), \quad \text{где } \ d_k = \frac{1}{\varphi_k(\lambda_k)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_{n,k} a_n.$$

УДК 517.9

Асимптотика стационарного распределения осциллирующего случайного блуждания

Д. К. Ким

Новосибирский государственный университет

Пусть $\{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}, i = 0,1,2$ — независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределенных внутри каждой последовательности, при этом предполагается, что $E\xi_n^{(1)} < 0, E\xi_n^{(2)} > 0$. Введем марковское случайное блуждание $\{X_n, n \geqslant 0\}$ следующим образом. Пусть a и b — произвольные числа, $a \leqslant 0 \leqslant b$ и X_0 случайная величина, независимая от $\{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}, i = 0,1,2$; для $n \geqslant 1$ положим $X_n = X_{n-1}+\xi_n^{(0)}$, если $X_{n-1} \in [a,b]$, $X_n = X_{n-1}+\xi_n^{(1)}$, если $X_{n-1} > b$ и $X_n = X_{n-1} + \xi_n^{(2)}$, если $X_{n-1} < a$. Случайные блуждания такого типа называются осциллирующими, они находят применение при описании различных систем обслуживания, моделей хранения запасов и др. Два уровня переключения изучались в работах Ю. В. Прохорова (1964), Д. В. Гусака (1988,1989), В. И. Лотова (1996), но с иными алгоритмами переключений.

В совместной статье Д. К. Кима и В. И. Лотова (2003) было показано существование стационарного распределения при наличии ненулевой абсолютно непрерывной компоненты у функций распределения суммируемых случайных величин и с помощью факторизационных методов получены тождества для преобразований Лапласа – Стилтьеса стационарного распределения. В данной работе на основе этих тождеств найдена асимптотика стационарного распределения цепи, если $b-a \to \infty$. При этом налагаются моментные ограничения на скачки блуждания.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Интеграция”.

УДК 517.911

Задача минимизации величины скачка решения импульсного уравнения в априорно неизвестные моменты времени

Д. М. Кинзебулатов

Ижевский государственный технический университет

Пусть пространство $\mathcal{G}'_m(t_0,t_1)$ — сопряженное к пространству $\mathcal{G}_m(t_0,t_1)$ финитных функций таких, что определенная почти всюду производная $f^{(k)}(t)$ $(k=0,\ldots,m)$ имеет односторонние пределы $f(t+)$, $f(t-)$ для каждого $t\in[t_0,t_1]$, снабженному топологией, индуцирующей топологию в пространстве основных функций $\mathcal{D}_m(t_0,t_1)$. Всякая обобщенная функция из $\mathcal{D}'_m(t_0,t_1)$ имеет продолжение в $\mathcal{G}'_m(t_0,t_1)$, в частности $\delta(t)\in\mathcal{D}'_m$ имеет продолжение $u\delta_+(t)+(1-u)\delta_-(t)\in\mathcal{G}'_m$, где $(\delta_+(t),\varphi)\doteq\varphi(t+)$, $(\delta_-(t),\varphi)\doteq\varphi(t-)$, $u\in\mathbb{R}$. Рассмотрим в $\mathcal{G}'_2(t_0,t_1)$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x}+(h(t)+s(t))x=0, \tag{1}$$

$$s(t)=\sum_{i=1}^{k}p(\tau_i)(u(\tau_i)\delta_+(t-\tau_i)+(1-u(\tau_i))\delta_-(t-\tau_i))+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}q(\tau_i)(v(\tau_i)\dot{\delta}_+(t-\tau_i)+(1-v(\tau_i))\dot{\delta}_-(t-\tau_i)),$$

где $h(\cdot)\in\mathcal{G}_0[t_0,t_1]$, $t_0<\tau_1<\cdots<\tau_n<t_1$, $p(\cdot),q(\cdot),u(\cdot),v(\cdot)\in PC[t_0,t_1]$. Решением уравнения (1) назовем функцию $x(\cdot)\in\mathcal{G}_2[t_0,t_1]$, обращающую (1) в равенство в $\mathcal{G}'_2(t_0,t_1)$ для всех $\varphi(\cdot)\in\mathcal{D}_2(t_0,t_1)$. Решение существует, если $1+q(\tau_i)v(\tau_i)\neq 0$ $(i=1,\ldots,k)$.

В отличие от интегрального оператора $y(t)=\int_{t_0}^{t}dr\int_{t_0}^{r}s(l)dl$, оператор граничной задачи для уравнения (1) «различает» коэффициенты в продолжении дельта-функции и ее производной в $s(\cdot)$. Мы хотим, не влияя на $y(\cdot)$, управлять $x(\cdot)$. Пусть $(u(\cdot),v(\cdot))$ — управление, $u(t)\in[-\xi(t),\xi(t)]$, $v(t)\in[-\eta(t),\eta(t)]$, заданы граничные условия $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$. Задача заключается в нахождении такого допустимого управления $(u^*(\cdot),v^*(\cdot))$, чтобы для любого набора моментов времени $\{\tau_i\}$ выполнялось: для каждого $t\in[t_0,t_1]$ справедливо $I(t,u^*,v^*)\leqslant I(t,u,v)$, где $I(t,u,v)=(x(t+)-x(t-))^2+(\dot{x}(t+)-\dot{x}(t-))^2$.

Теорема. *Оптимальное управление существует и имеет вид* $u^*(t) = \xi(t)\operatorname{sign} q(t)$, $v^*(t) = -\eta(t)\operatorname{sign} q(t)$.

УДК 517.957, 514.763.24

О законах сохранения в солитонных комплексах

А. В. Киселёв

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В работе рассмотрены законы сохранения в солитонных комплексах ([1, 2]) — аналогах нелинейного уравнения Шрёдингера вида

$$\mathcal{E}_{\rm NLS} = \{\Psi_t = \boldsymbol{i}\Psi_{xx} + \boldsymbol{i}f(\mathcal{I})\,\Psi, \bar{\Psi}_t = -\boldsymbol{i}\bar{\Psi}_{xx} - \boldsymbol{i}f(\mathcal{I})\,\bar{\Psi},\ \mathcal{I} \equiv \Psi\bar{\Psi}\}, \quad (1)$$

где Ψ — m-компонентный вектор ($m \geqslant 1$), $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$ и $f \in C^1(\mathbb{R})$.

1. Уравнение (1) гамильтоново при произвольной функции f относительно гамильтоновой структуры $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и гамильтониана с сохраняющейся на $\mathcal{E}_{\rm NLS}$ плотностью $H_{\rm NLS} = -\boldsymbol{i}\Psi_x\bar{\Psi}_x + \boldsymbol{i}\int^{\mathcal{I}} f(\mathcal{I})\,{\rm d}\mathcal{I}$.

Кроме закона сохранения $[\mathcal{I}\,{\rm d}x]$ полной энергии $\Psi\bar{\Psi}$, уравнение (1) допускает m сохраняющихся по отдельности плотностей $Q_i = \Psi^i \cdot \bar{\Psi}^i$: $D_t\big|_{\mathcal{E}_{\rm NLS}}(Q_i) = 0$ при каждом $i \in [1,\,m]$.

Утверждение. *При любой нелинейности f m-компонентное уравнение (1) допускает m^2 сохраняющихся токов* $\eta_{ij} = \Psi^i\bar{\Psi}^j\,{\rm d}x + \boldsymbol{i}\big(\Psi^i_x\,\bar{\Psi}^j - \Psi^i\,\bar{\Psi}^j_x\big)\,{\rm d}t$: $\operatorname{div}\eta_{ij} = 0$ *на* $\mathcal{E}_{\rm NLS}$.

Градиенты законов сохранения $[\eta_{ij}]$ суть $\vec{\psi}_{(ij)} = {}^t(\psi_{(ij)}, \bar{\psi}_{(ij)})$, где $\psi^i_{(ij)} = \bar{\Psi}^j$, $\bar{\psi}^j_{(ij)} = \Psi^i$ и $\psi^{i'}_{(ij)} = \bar{\psi}^{j'}_{(ij)} = 0$ при $i' \neq i$, $j' \neq j$. Гамильтонова структура Γ отображает их в симметрии $\vec{\varphi}_{(ij)} = {}^t(\varphi_{(ij)}, \bar{\varphi}_{(ij)})$: $\varphi^i_{(ij)} = \Psi^j$, $\bar{\varphi}^j_{(ij)} = -\bar{\Psi}^i$; в случае $i = j$ получаем симметрии $\Psi^i \mapsto \exp(\lambda)\Psi^i$, $\bar{\Psi}^i \mapsto \exp(-\lambda)\bar{\Psi}^i$ с гамильтонианами $[Q_i\,{\rm d}x]$.

2. Соответствующее $f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ m-компонентное уравнение (1) с кубической нелинейностью допускает рекурсию ([1]) $R_{\rm NLS} = \left(\begin{smallmatrix} -D_x & 0 \\ 0 & D_x \end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} \Psi \\ -\bar{\Psi} \end{smallmatrix}\right) \cdot D_x^{-1} \circ \big(\bar{\Psi}, \Psi\big) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\vec{\varphi}_{(ij)} \cdot D_x^{-1} \circ \vec{\psi}_{(ij)}$, которая порождает иерархию нелинейного уравнения Шрёдингера (1).

Следствие. *Оператор рекурсии* $R_{\rm NLS}$ слабо нелокален, *то есть представи́м в виде $R =$ локальная часть $+ \sum_\alpha \varphi_\alpha \circ D_x^{-1} \circ \psi_\alpha$, где φ_α — симметрии, а ψ_α — градиенты законов сохранения.*

Автор благодарен И. С. Красильщику за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке INTAS, грант YS 2001/2-33.

[1] Жибер А. В. Уравнения n-волн и система нелинейных уравнений Шредингера с групповой точки зрения. *ТМФ.* — 1982. — **52**, №3. — 405–413.

[2] Akhmediev N., Ankiewicz A. Multi–soliton complexes. *Chaos.* — 2000. — **10**, №3. — 600–612.

УДК 517.957, 514.763.24

Паде-аппроксимация параметрического синтеза управлений

Е. В. Комарова, Ю. А. Моисеева

В последнее время в работах [2], [5] рассмотрены интерполяционные процедуры построения рациональных Паде - аппроксимаций к решению начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром, где при малых значениях параметра решения задач содержат пограничный слой, а при большом или "срединном"значениях параметра решения задачи имеют регулярные асимптотические разложения. В работах [1], [4], [5] эти подходы начали применяться для аппроксимации решений задач оптимального управления.

Решение задач оптимального управления с параметром, как правило, можно получать с помощью численных процедур при конкретных значениях параметров. Сами по себе эти численные процедуры достаточно громоздки и являются “дорогостоящими” по количеству вычислений, требованиям к характеристикам ЭВМ, знанию алгоритмов и т. д.

Предлагаемая в работе методика применима к произвольным классам задач оптимального управления, где управление есть гладкая функция своих аргументов и для которых имеются соответствующие результаты по асимптотикам оптимальных решений.

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления с параметром

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt \to \min_u \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\varepsilon \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

где $x \in R^n, y \in R^m$, $\varepsilon \in [0, \infty)$, $t \in [0, T]$, $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, $R(t)$, $Q(t)$ — соответственно положительно определенная и положительно полуопределенные матрицы на отрезке $[0, T]$, а F — постоянная положительно-полуопределенная матрица.

Этот класс задач непосредственно связан с приложениями, где при большом значении параметра можно говорить об управлении с большим коэффициентом усиления, а при малых значениях параметра — о случае слабоуправляемых систем.

[1] Беляева Н. П. Разработка алгоритмов построения семейств траекторий динамических систем на основе Паде-аппроксимации и асимптотических разложений. Автореферат канд. дис. к.ф.-м.н. — Ярославль: ЯрГУ, 1999.

[2] Беляева Н. П., Дмитриев М. Г. Построение приближенного решения начальных задач с параметром на основе Паде-аппроксимации и асимптотических разложений. *ЖВМ МФ*. — 2004. — **44**, №1. — 112–122.

[3] Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. В кн.: Итоги науки и техники, Математический анализ. **20**. — ВИНИТИ АН СССР, 1982. — 3–77.

[4] Комарова Е. В. Асимптотическая Паде интерполяция решений краевых и вариационных задач с параметром Автореф. канд. дис. к.ф.-м.н. — Москва, 2002.

[5] Belyaeva N., Dmitriev M., Komarova E. Pade-approximation as a “briedge” between two parametric boundary asymptotics. In “5th IFAC symposium nonlinear control systems” NOLCOS’2001. — St.-Peterburg. — 635–639.

УДК 517.957, 514.763.24

Об одном обобщении пространства Лоренца

А. Н. Копежанова

Пространства l_{pq} Лоренца являются более тонкой шкалой пространств, чем шкала пространств Лебега и имеет большое применение в дифференциальных уравнениях, рядах Фурье, в теории приближений, в теории функциональных пространств.

Основным свойством пространства Лоренца является иерархическая зависимость ее параметров, т.е. имеют место свойства:

1) $l_{pq} \subset l_{pq_1}$ при $1 \leqslant q < q_1 < \infty$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad l_{pq} \subset l_{p+\epsilon q_1}$ при $1 \leqslant q_1, q \leqslant \infty, 1 \leqslant p < \infty$.

Свойства 1), 2) позволяют говорить, что первый параметр p-сильный,а q-слабый. Эти свойства являются характеристическими свойствами в теории интерполяции, т. е. только для таких пространств имеют смысл интерполяционные теоремы типа теоремы Марцинкевича.

Пусть $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условию: $1 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots$

Пусть $1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty$. Через $l_{pq}(b)-$ обозначим пространство всех последовательностей $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=b_k}^{b_{k+1}-1} (a_m^*)^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Если $q < \infty$

$$\|a\|_{l_{pq}(b)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=b_k}^{b_{k+1}-1} (a_m^*)^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Если $q = \infty$

$$\|a\|_{l_{p\infty}(b)} = \sup_k \left(\sum_{m=b_k}^{b_{k+1}-1} (a_m^*)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\{a_k^*\}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{|a_k|\} \in l_{pq}(b)$. Эти пространства в случае $b_k = 2^k,\ k \in \mathbf{N}$ совпадают с классическими пространствами Лоренца.

В данной работе решается задача о нахождении необходимых и достаточных условий на последовательность $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$,так чтобы пространство $l_{pq}(b)$ удовлетворяло характеристическим свойствам 1),2).

Теорема. *Пусть дана последовательность $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяющая условию: $1 = b_1 < b_2 < \ldots$ и найдется $c > 1$ что*

$$c > \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k - b_{k-1}} > 1, k = 2, 3, \ldots .$$

Тогда для того, чтобы пространство $l_{pq}(b)$ удовлетворяло свойствам 1),2) необходимо и достаточно $\forall \delta > 0$ сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b_k - b_{k-1})^{\delta}} < \infty.$$

[1] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980.

УДК 984.4

О характеристической функции струны Крейна

А. С. Костенко

Донецкий национальный университет

Пусть на промежутке $[0,\ l\rangle$ задана неубывающая функция $m(x)$ и $m(0) = 0$. Знак "$\rangle$" обозначает закрывающую квадратную скобку, если $\mathcal{L} := l + m(l-0) < \infty$ (случай регулярной струны) и закрывающую круглую скобку, если $\mathcal{L} = \infty$ (случай сингулярной струны). Равенство $g(x) = D_m f(x) := -i\frac{df(x)}{dm(x)}, \quad x \in [0,\ l\rangle$, обозначает производную Радона – Никодима по мере Лебега – Стилтьеса (когда $m(x) = x$ условимся писать $D_m = D$).

Рассмотрим оператор струны

$$L_S = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ -D_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

действующий в гильбертовом пространстве $H = L^2\,[0, l\rangle \oplus L^2_m\,[0, l\rangle$, область определения которого состоит из вектор функций

$$\overline{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in W^1_{2,m}\,[0,\ l\rangle \oplus W^1_2\,[0,\ l\rangle\,, \qquad f_1(-0) = f_2(0). \tag{2}$$

Кроме того, в случае регулярной струны в правом конце будем различать два вида условий: $f_1(l+0)=0$, либо $f_2(l)=0$ (подробности см. в [2]).

М. А. Нудельманом [2] показано, что оператор $-B_S := iL_S$ является максимальным аккретивным и исследованы свойства его характеристической функции. При этом исследование свойств последней было сведено к исследованию свойств передаточной функции консервативной системы рассеяния с непрерывным временем, в которую оператор B_S был включен в качестве основного оператора системы.

Нами реализован иной подход, основанный на применении техники граничных троек(см., например, [1]). Именно, для нахождения характеристической функции оператора L_S используется формула для характеристической функции почти разрешимых расширений симметрических операторов, найденная В. А. Деркачем и М. М. Маламудом (см. [1]). Заметим, что оператор L_S является собственным расширением простого симметрического оператора с инлексами дефекта $(2,2)$ в регулярном, и $(1,1)$ в сингулярном случае, а потому является почти разрешимым.

Следующая теорема доказана М. А. Нудельманом в [2]. Мы получили простое ее доказательство, основанное на формуле для характеристических функций из [1].

Теорема 1 [2]. *Пусть L_S оператор струны вида* (1) *и* $\Gamma(\lambda)$ *ее коэффициент динамической податливости. Тогда характеристическая функция оператора струны имеет вид*

$$W(\lambda)=\frac{1-i\lambda\Gamma(\lambda^2)}{1+i\lambda\Gamma(\lambda^2)} \tag{3}$$

[1] Деркач В. А., Маламуд М. М. Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов. *Укр. мат. журн.* — 1992. — **44**, №4. — 435–459.

[2] Нудельман М. А. Струна Крейна и характеристические функции максимальных диссипативных операторов. *Зап. науч. сем. ПОМИ.* — 2002. — **290**. — 138–167.

УДК 517.929

О продолжимости решений системы функционально-разностных уравнений

Е. В. Кукушкина

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Рассматривается линейная однородная система функционально-разностных уравнений

$$x(t) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t,\vartheta)\, x(t+\vartheta), \quad t > t_0, \tag{1}$$

где $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ матричная функция $\eta(t,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r,0]$, $\eta(t,0)=0$.

Для начального момента $t_0 \in \mathbb{R}$ и начальной функции $\varphi \in \mathbb{C}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$ ставится задача нахождения решения $x(t,t_0,\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $x(t,t_0,\varphi)=\varphi(t)$ при $t \in [t_0-r,t_0]$ и системе уравнений (1) при $t \in (-\infty,t_0-r)\cup(t_0,+\infty)$. В работе [1] получены достаточные условия существования единственного решения системы уравнений (1) на полуоси $[t_0-r,+\infty)$. Продолжение этого решения на всю числовую ось возможно при дополнительных ограничениях.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in C([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$, выполнено условие согласования $\varphi(t_0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(t_0,\vartheta)\,\varphi(t_0+\vartheta)$ и*

1) *функция $\operatorname*{var}_{z\in[-r,0]} \eta(t,z)$ ограничена на любом отрезке числовой оси,*
2) *отображение $t \to \eta(t,-r)$ непрерывно на числовой оси,*
3) *для любого $\tau \in \mathbb{R}$ отображение $t \to \int_{t-r}^{\tau} \eta(t,s-t)\,ds$ непрерывно на любом отрезке числовой оси,*
4) *$\operatorname*{var}_{z\in[-\Delta,0]} \eta(t,z) \to 0$ при $\Delta \to 0$ равномерно по t на любом конечном отрезке числовой оси,*
5) *$\det P(t) \neq 0$ при $t \in \mathbb{R}$ и отображение $t \to P^{-1}(t)$ непрерывно на числовой оси. Здесь $P(t) = \eta(t,-r+0) - \eta(t,-r)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Тогда начальная задача Коши для уравнения (1) имеет единственное непрерывное решение на всей числовой оси.

[1] Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В. Общий вид решения линейной нестационарной системы функционально-разностных уравнений. *Изв.вузов. Математика.* — 2003. — № 7. — 27–34.

УДК 517.518.45

Оценка скорости сходимости рядов Фурье-Лежандра функций ограниченной вариации

Д. В. Курдомонов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1,1]$ и

$$S_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f) P_k(x)$$

частные суммы ее ряда Фурье по полиномам Лежандра, нормированных условием $P_n(1) = 1$. В [3] доказано, что

$$|S_n(f,x) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{28(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n} \sum_{k=1}^{n} \bigvee_{x-\frac{(1+x)}{k}}^{x+\frac{(1-x)}{k}} (g_x) + \frac{(1-x^2)^{-1}}{\pi n} |f(x+0) - f(x-0)|, \quad (1)$$

где

$$g_x(t) = \begin{cases} f(t) - f(x-0), & -1 \leqslant t < x \\ 0, & t = x \\ f(t) - f(x+0), & x < t \leqslant 1 \end{cases}$$

Оценку (1) можно усилить следующим образом. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $n_1 = 1 < n_2 < \dots$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{n_j} \leqslant \frac{A}{n_m}, \qquad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $A > 1$ некоторая постоянная.

Теорема. *Пусть $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1,1]$, а последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (2), тогда для $x \in (-1,1)$ и $n \geqslant 2$ справедливо неравенство*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00787) и программы "Ведущие научные школы"(проект НШ-1549.2003.1).

$$
\begin{aligned}
|S_n(f,x) - \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))| &\leqslant \\
\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n_i-1} a_k(f)P_k(x)\right| &+ \sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k(f)P_k(x)\right| \leqslant \\
\leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{(n+1)} &\sum_{k=1}^{n+1} \bigvee\nolimits_{x-\frac{(1+x)}{k}}^{x+\frac{(1-x)}{k}}(g_x) + \\
&+ \frac{CA(1-x^2)^{-1}}{\pi(n+1)}|f(x+0)-f(x-0)|, \quad (3)
\end{aligned}
$$

где $n_{i-1} \leqslant n < n_i$, *$A$ множитель из оценки (2), а C — абсолютная константа.*

Оценка (1) является аналогом оценки Боянича [2] для тригонометрических рядов, а оценка (3) — аналог оценки Теляковского [1].

[1] Теляковский С. А. О скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации. *Математические заметки.* — 2002. — **72**. — 949–953.

[2] Bojanic R. An Estimate of the Rate of Convergence for Fourier Series of Functions of Bounded Variations. *Publications de l'institut mathématique (Beograd).* — 1979. — **26(40)**. — 57–60.

[3] Bojanic R., Vuilleumier M. On the Rate of Convergence of Fourier – Legendre Series of Functions of Bounded Variation. *Journal of Approx. Theory.* — 1981. — **31**. — 67–69.

УДК 519.71

О свойстве обратимости бинарных клеточных автоматов

И. В. Кучеренко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Клеточные автоматы (КА) являются дискретными математическими моделями широкого класса реальных систем вместе с протекающими в них процессами [2], [1]. Важный класс клеточных автоматов образуют обратимые клеточные автоматы (ОКА), то есть такие, в которых "предыстория" возникновения конфигурации определяется однозначно. Эти объекты имеют много приложений, в том числе в вопросах защиты информации.

Одним из наиболее важных параметров класса ОКА, существенно влияющим на его свойства, является размерность пространства ячеек. В процессе ее роста "устройство" обратимых клеточных автоматов сильно усложняется. С алгоритмической точки зрения наиболее значимым является переход от размерности 1 к 2, так как свойство обратимости неразрешимо для КА размерности два и больше [4].

Автором была рассмотрена задача алгоритмического распознавания свойства обратимости в классах BCA(k) клеточных автоматов с двумя состояниями ячейки и фиксированной размерностью пространства ячеек k. Из результатов работы [3] вытекает, что для класса BCA(1) свойство обратимости алгоритмически разрешимо. Для остальных классов автором было получено следующее усиление результата [4].

Теорема. *Не существует алгоритма, который по клеточному автомату из класса* BCA(k), $k > 1$ *определял, является ли он обратимым.*

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[2] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. — М.: Наука, 1990.

[3] Amoroso S., Patt Y. N. Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures. *Journal of Computer and System Sciences* — 1972. — **6**, № 5. — 448–464.

[4] Kari J. Reversibility and Surjectivity Problems of Cellular Automata. *Journal of Computer and System Sciences* — 1994. — **48**, № 1. — 149–182.

УДК 517.9

Аппроксимации меры на пространстве траекторий в римановом многообразии, связанной с броуновским движением со сносом

Е. С. Лангваген

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Работа посвящена исследованию меры, которая возникает на пространстве траекторий в компактном римановом многообразии при рассмотрении на нем броуновского движения со сносом. Риманово многообразие предполагается изометрично вложенным в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$; для каждого разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ отрезка $[0,1]$ строится некоторый случайный процесс в $\mathbb{R}^N$, траектории которого начинаются в фиксированной точке многообразия и посещают многообразие в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$. Получены результаты о слабой сходимости построенных таким образом процессов при измельчении разбиения $\mathcal{P}$.

Пусть M — m-мерное связное компактное замкнутое риманово многообразие, вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ и пусть $\mathbf{W}_M^{(v)}$ — выходящий из точки $a \in M$ непрерывный диффузионный процесс на M с инфинитезимальным оператором $\frac{1}{2}\Delta_M + v\nabla_M$, где v — гладкое векторное поле на M.

Пусть $\mathcal{P}$ — разбиение отрезка $[0,1]$. На пространстве непрерывных траекторий в $\mathbb{R}^N$ вводятся две меры $\mathbf{W}_{M,\mathcal{P}}^{(v)}$ и $\mathbf{V}_{M,\mathcal{P}}^{(v)}$ интерполирующие независимыми броуновскими мостами в $\mathbb{R}^N$ некоторые процессы на M с дискретным (принадлежащим $\mathcal{P}$) временем.

Теорема 1. *При $|\mathcal{P}| \to 0$ меры $\mathbf{W}_{M,\mathcal{P}}^{(v)}$ слабо сходятся к $\mathbf{W}_M^{(v)}$.*

Теорема 2. *При $|\mathcal{P}| \to 0$ меры $\mathbf{V}_{M,\mathcal{P}}^{(v)}$ слабо сходятся к мере $\mathbf{V}_M^{(v)}$, абсолютно непрерывной относительно $\mathbf{W}_M^{(v)}$ с плотностью Радона – Никодима*

$$\frac{d\mathbf{V}_M^{(v)}}{d\mathbf{W}_M^{(v)}} = \frac{1}{C} e^{-S(\xi)},$$

где C — нормировочный коэффициент и

$$S(\xi) = \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{scal}(\xi(t))}{6} - \nabla_M v(\xi(t)) \right) dt.$$

УДК 681.32

Использование нечетких множеств в поисковом механизме библиографической системы

А. Ю. Лексин, В. М. Маркин, О. П. Сергеева

Владимирский государственный университет

Целью работы являлось определение возможностей и подходов к использованию математического аппарата теории нечетких множеств и мягких вычислений при реализации поискового модуля библиографической системы. В ходе работы было предложено два подхода в этом направлении.

Первый вариант использования аппарата нечетких вычислений для обработки запроса пользователя является, фактически, другой интерпретацией существующего подхода на основе законов Зипфа [1, 2]. Отличие состоит в том, что в текстовом анализаторе при выделении значимых слов текста рассчитывается не интервал на оси "Ранг" (см. [2]), который должен содержать именно эти слова, а строится функция принадлежности. По значениям этой функции отбрасываются слова, которые не могут повлиять на основное содержание (смысл) анализируемого текста. Для оставшихся слов значения функции принадлежности заменяют вычисляемые по законам Зипфа весовые коэффициенты слов базы данных.

Суть второго подхода состоит в том, что после выделения из текста ключевых слов и сопоставления им весовых коэффициентов вычисляется дополнительная характеристика - нормированный весовой коэффициент по максимальному весовому коэффициенту. Именно эта характеристика влияет на релевантность документа запросу пользователя. Для определения релевантности запросу из нескольких слов используется операция сложения нечётких чисел. Самым близким по релевантности будет выбран тот документ, где значение функции принадлежности получившейся суммы будет максимальным.

В настоящее время технически реализован первый из предложенных вариантов. Проводится исследование влияния различных видов функции принадлежности и ее параметров на результаты поиска.

[1] Zipf G.K. Psycho-Biology of Languages. — Houghton-Mifflin, 1935.

[2] Попов А. Поиск в Интернете - внутри и снаружи. Эффективная методика поиска информации в сети Интернет. — Internet: `http://www.citforum.ru/pp/search_03.shtml`

УДК 517.95

Правильные решения краевых задач эллиптического типа с разрывной нелинейностью

М. Г. Лепчинский

Челябинский государственный университет

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$Lu(x) = g_0(x, u(x)),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с достаточно гладкой границей, где L — равномерно эллиптический формально самосопряженный оператор с достаточно гладкими коэффициентами, функция $g_0 : \Omega \times R \to R$ борелева (mod 0), для почти всюду $x \in \Omega$ сечение $g_0(x, \cdot)$ имеет разрывы только первого рода, $|g_0(x, u)| < a(x)\ \forall u \in R$, $a \in L_q(\Omega)$, $q > n$, $g_0(x, u-) \leqslant g_0(x, u+)$ и $g_0(x, u) \in [g_0(x, u-), g_0(x, u+)]$ для произвольного $u \in R$, причем для краевой задачи выполняется условие коэрцитивности.

Вместе с исходной рассматриваются приближенные краевые задачи

$$Lu(x) = g(x, u(x)),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

где функция g удовлетворяет тем же условиям, что и g_0.

Изучается вопрос существования правильных решений задачи (1)-(2).

Определение 1. Решение $u_0(x)$ краевой задачи (1)-(2) называется полуправильным, если для п.в. $x \in \Omega$ точка $u_0(x)$ является точкой непрерывности $g_0(x, u)$ по фазовой переменной.

Определение 2. Решение $u_0(x)$ краевой задачи (1)-(2) называется корректным, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists T > 0$ такие, что для любой нелинейности g, удовлетворяющей условию близости

$$\int_\Omega dx \int_{-T}^{T} |g(x, s) - g_0(x, s)| ds < \delta,$$

в ε-окрестности решения $u_0(x)$ в пространстве $C^1(\overline{\Omega})$ существует полуправильное решение задачи (3)-(4).

Определение 3. Полуправильное и корректное решение краевой задачи (1)-(2) называется правильным.

Теорема 1. *Пусть $u_0(x)$ точка строгого локального минимума вариационного функционала, сопоставляемого краевой задаче (1)-(2). Тогда $u_0(x)$ является правильным решением этой задачи.*

Теорема 2. *Если вариационный функционал, сопоставляемый краевой задаче (1)-(2), имеет не более счетного числа точек глобального минимума, то существует правильное решение этой задачи.*

УДК 517.946

Условия подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов в $C(\mathbb{R}^n)$

Д. В. Лиманский

Донецкий национальный университет

Хорошо известен [2] следующий критерий эллиптичности дифференциального полинома $P(D)$ порядка d от $n \geqslant 3$ переменных: для этого необходимо и достаточно, чтобы $P(D)$ подчинял в норме $C(\mathbb{R}^n)$ все операторы $Q(D)$ порядка $\leqslant d-1$, т. е.

$$\|Q(D)f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\left\{\|P(D)f\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{C(\mathbb{R}^n)}\right\}, \quad \deg Q \leqslant d-1.$$

Здесь $D = (D_1, \ldots, D_n),\ D_j = -i\partial/\partial x_j;\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$; константа $C > 0$ не зависит от выбора $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

В докладе обсуждается аналог этого критерия для системы дифференциальных полиномов $\{P_j(D)\}_1^N$ с "обобщенно однородными" относительно фиксированного вектора $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ главными частями $\{P_j^l(D)\}_1^N$, т. е. частями вида

$$P_j^l(D) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha D^\alpha, \quad |\alpha : l| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_i/l_i, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Так, доказывается, что l-квазиэллиптичность системы $\{P_j(D)\}_1^N$, т. е. отсутствие у полиномов $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ общего нетривиального вещественного нуля, равносильна оценке

$$\|Q(D)f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{C(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{C(\mathbb{R}^n)}$$

для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и всех операторов $Q(D) = \sum_{|\alpha:l|<1} a_\alpha D^\alpha$ при некоторых дополнительных условиях на систему полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^N$. Причем отдельно рассмотрены как изотропный ($l_1 = \dots = l_n$), так и анизотропный случаи.

Доклад соответствует содержанию статьи [1].

[1] Лиманский Д. В., Маламуд М. М. О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L_1 и L_∞. *ДАН.* — 2004. (в печати).

[2] De Leeuw K., Mirkil H. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm. *Illinois J Math.* — 1964. — **8**, № 3. — 112–124.

УДК 517.946

Об асимптотике коэффициентов Тейлора рациональной производящей функции с линейными особенностями

А. П. Ляпин

Красноярский государственный университет

Асимптотика коэффициентов Тейлора для рациональной функции одной переменной определяется вычетом в ближайшем полюсе. Для $n > 1$ ситуация гораздо сложнее: случай $n = 2$ рассмотрен А. К. Цихом [2], некоторые результаты для $n > 2$ получены в работе [1].

В работе рассматривается случай, когда знаменатель производящей функции двумерной последовательности $\{a(n, m)\}$ имеет линейные особенности. Для получения информации об асимптотике исследуют диагональные подпоследовательности вида $\{a(kp, kq)\}$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $k \to \infty$ и соответствующие им (p, q)-диагонали, т. е. функции вида $d_{p,q}(t) = \sum_{k \geqslant 0} a(kp, kq) t^k$.

Полученные результаты можно применить к решению некоторых комбинаторных задач, поставленных в работе [3].

[1] Орлов А. Г. Об асимптотике коэффициентов Тейлора рациональной функции двух переменных. *Изв. вузов. Математика.* — 1993. — № 6. — 26–33.

[2] Цих А. К. Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфной функции двух переменных. *Матем. сб.* — 1991. — № 11. — 1588–1612.

[3] Pemanle R., Wilson M. Asymptotics of multivariate sequences, part I: smooth points of the singular variety. *J. Comp. Th.* — (to appear).

УДК 517.946

О многообразиях уровня линейных интегралов механических систем

В. А. Мельдианова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Изучается задача о том, как могут выглядеть многообразия уровня интегралов механической системы, имеющей n первых интегралов не находящихся в инволюции (n — число степеней свободы).

Рассматривается консервативная механическая система с гладким замкнутым ориентируемым компактным n-мерным конфигурационным многообразием K. Предполагается, что система обладает интегралом энергии и имеет $n-1$ интегралов, линейных по скоростям. Считается, что эти линейные интегралы независимы по скоростям в каждой точке конфигурационного пространства. Константы линейных интегралов могут быть любыми, а константа интеграла энергии берётся достаточно большой. В этом случае, доказывается, что многообразие уровня интеграла энергии и линейных интегралов имеет две связные компоненты, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию K.

Это утверждение также справедливо и для неголономных механических систем, где роль линейных интегралов могут выполнять связи, линейные по скоростям.

Утверждение иллюстрируется несколькими примерами.

Рассматривается волчок Эйлера с эксцентриком (голономная система). На основании утверждения, показывается, что многообразие уровня, высекаемое в фазовом пространстве интегралом энергии и тремя интегралами сохранения момента количества движения в абсолютных осях, имеет две компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию $SO(3) \times S_1$.

Также рассматриваются сани Чаплыгина на криволинейной поверхности (неголономная система), у которых центр масс совпадает с точкой касания лезвия. Здесь доказывается, что у системы существует линейный интеграл. Показывается, что многообразие уровня, высекаемое в фазовом пространстве интегралом энергии, этим линейным интегралом и связью, имеет две компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию $T_S \sum$.

УДК 519.615.5, 519.622

Применение методов ньютоновского типа для эффективной реализации высокоточных методов со старшими производными

А. И. Меркулов

Ульяновский государственный университет

1. Итерационные процессы ньютоновского типа.

При решении многих задач современной прикладной математики часто возникают системы нелинейные уравнений, для решения которых применяют итерационные процессы ньютоновского типа (см. [2]):

$$x^N = x^{N-1} - A(x^{N-1})^{-1} F x^{N-1}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы 12.6.4 (*[2, с. 408]*), тогда в обозначениях указанной теоремы для ошибки методов* (1) *при любом достаточно малом α справедлива оценка*

$$\|x^* - x^N\| < \frac{C}{\sigma\gamma} \sum_{i=1}^{N+1} (\beta\delta_0)^{N-i+1} (2\alpha)^i, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где C — некоторая константа, независящая от параметров метода.

2. Эффективная реализация высокоточных методов со старшими производными.

Для повышения эффективности практической реализации одношаговых методов со старшими производными, построенных на основе коллокационной техники из [1], было предложено использовать итерации (1) с матрицей A, полученной путем отбрасывания при вычислении матрицы Якоби всех производных правой части задачи Коши.

Теоретические оценки, основанные на теореме 1, и практические вычисления показали сходимость комбинированных методов с итерациями (1) аналогичную применению модифицированных итераций Ньютона на фоне общего сокращении времени вычислений.

[1] Аульченко С.М., Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1998. — **38**, № 10. — 1665–1670.

[2] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.

УДК 519.615.5, 519.622

К построению картановского продолжения алгебры Ли типа B_3

Т. М. Митрофанова

Казанский государственный университет

Пусть $L = \sum\limits_{i=-3}^{-1} L_i$ — нильпотентная часть классической алгебры Ли типа B_3 с градуировкой по высоте корней. Конечная цель данной работы построение полного картановского продолжения алгебры L над полем K характеристики $p = 2, 3$ с помощью ползущего отображения (см. [1]). При других характеристиках продолжение обрывается алгеброй типа B_3. В данных тезисах мы укажем только отображения π_0 и π_1.

В обозначениях [1] имеем.

Случай π_0 для $p \neq 2$.

Пусть $V_0 = \langle\, v_i\partial_j,\ i,j = 1,2,3;\ i \neq j\,\rangle$. Положим $\pi_0(x_i\xi_i) = 0$ и $\pi_0(x_i\xi_j) = v_i\partial_j$ для $i,j = 1,2,3;\ i \neq j$.

При $p = 2$ $V_0 = \langle\, v_i\partial_j,\ i,j = 1,2,3;\ i \neq j; (i,j) \neq (1,3)\,\rangle$ и $\pi_0(x_i\xi_i) = 0$ для $i = 1,2,3$ и $\pi_0(x_1\xi_3) = 0,\ \pi_0(x_i\xi_j) = v_i\partial_j,\ i,j = 1,2,3;\ i \neq j,\ (i,j) \neq (1,3)$.

Случай π_1.

V_1 подпространство в $\langle\, v_iv_j\partial_k\,\rangle$ (c — соответствующий состав).
$c = (-1,0,2):\ \pi_1(x_3^2\xi_1) = 0$ при $p = 3$; $c = (-1,1,1):\pi_1(x_2x_3\xi_1) = -2v_2v_3\partial_1$,
$\pi_1(x_3x_2\xi_1) = v_2v_3\partial_1$; $c = (-1,2,0):\ \pi_1(x_2^2\xi_1) = 0$; $c = (0,-1,2):\ \pi_1(x_3^2\xi_2) = 0$;
$c = (0,0,1):\ \pi_1(x_1x_3\xi_1) = v_1v_3\partial_1,\ \pi_1(x_2x_3\xi_2) = v_2v_3\partial_2,\ \pi_1(x_3x_1\xi_1) = -v_1v_3\partial_1$,
$\pi_1(x_3x_2\xi_2) = -3v_2v_3\partial_2,\ \pi_1(x_3^2\xi_3) = -3v_2v_3\partial_2$;
$c = (0,1,0):\ \pi_1(x_1x_2\xi_1) = v_1v_2\partial_1,\ \pi_1(x_2x_1\xi_1) = -v_1v_2\partial_1 + v_2^2\partial_2 + v_2v_3\partial_3,\ \pi_1(x_2^2\xi_2) = v_2^2\partial_2,\ \pi_1(x_2x_3\xi_3) = v_1v_2\partial_1 + v_2^2\partial_2 - v_2v_3\partial_3,\ \pi_1(x_3x_2\xi_3) = v_2v_3\partial_3$;
$c = (1,0,0):\ \pi_1(x_1^2\xi_1) = v_1v_2\partial_1,\ \pi_1(x_1x_2\xi_2) = 2v_1v_2\partial_1,\ \pi_1(x_1x_3\xi_3) = v_1v_2\partial_1$,

$\pi_1(x_2x_1\xi_2) = -v_1v_2\partial_1$, $\pi_1(x_3x_1\xi_3) = -v_1v_2\partial_1$; $c = (2,-1,0)$: $\pi_1(x_1^2\xi_2) = 0$.

Аналогично задаются π_k для $k = 2,3,4,5$ и ползучее отображение π.

[1] Ермолаев Ю. Б. Об одной реализации картановских продолжений. *Известия вузов. Математика.* — (подана в журнал).

УДК 517.9

Исследование устойчивости колебаний упругого элемента стенки бесконечного канала

А. А. Молгачев

Ульяновский государственный технический университет

Исследуется задача о плоском движении идеального газа (жидкости) в канале, стенка которого содержит деформируемый упругий элемент (пластина-вставка). Рассматривается плоское течение в прямоугольном канале $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \infty,\ 0 < y < y_0\}$. Упругой является нижняя часть стенки $y = 0$. Постановка задачи в математической форме имеет вид:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x,y) \in J. \tag{1}$$

$$L(w) = \rho\left(\varphi_t(x,0,t) + \varphi_x(x,0,t)\right), \quad x \in (a,b); \tag{2}$$

$$L(w) \equiv Dw'''' + \beta_2\dot{w}'''' + m\ddot{w} + Nw'' + \beta_1\dot{w} + \beta_0 w. \tag{3}$$

Линеаризованные граничные условия, вытекающие из условий непротекания, имеют вид:

$$\varphi_y(x,y_0,t) = 0, x \in [a,b]; \quad \varphi_y(x,0,t) = 0, x \in (-\infty,a] \cup [b,\infty); \tag{4}$$

$$\varphi_y(x,0,t) = w_t(x,t) + Vw_x(x,t), \quad x \in [a,b]. \tag{5}$$

Условия отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке:

$$\varphi_y(x,y_0,t) = 0,\ x \in [a,b];\ \varphi_y(x,0,t) = 0,\ x \in (-\infty,a] \cup [b,\infty); \tag{6}$$

В результате проведенного решения гидродинамической задачи (1)-(6) методами ТФКП уравнение (2) может быть записано в виде:

$$L(w) = -\rho\int_a^b (\ddot{w} + V\dot{w}')\,K(\tau,x)\,d\tau - \rho V\int_a^b (\dot{w} + Vw')\,K_x(\tau,x)\,d\tau, \tag{7}$$

где

$$K(\tau, x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{e^{-\frac{\pi a}{y_0}} - e^{-\frac{\pi b}{y_0}}}{e^{-\frac{\pi \tau}{y_0}} - e^{-\frac{\pi x}{y_0}}} \right|, \quad K_x(\tau, x) = -\frac{1}{y_0} \frac{e^{-\frac{\pi x}{y_0}}}{e^{-\frac{\pi \tau}{y_0}} - e^{-\frac{\pi x}{y_0}}}.$$

Для данной задачи разработан численно-аналитический метод исследования устойчивости решения уравнения (7) и получены условия его устойчивости.

УДК 517.9:532

Об одной многослойной жидкости

О. В. Моспан

Крымский государственный индустриально-педагогический университет

Рассмотрена задача о свободных колебаниях многослойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренних поверхностях. Выведено частное уравнение, удобное для аналитического и численного исследований. Получено условие устойчивости собственных колебаний механической системы для n-слойной жидкости, проведены численные исследования первой собственной частоты.

УДК 531.01

О принципе Гаусса (по работам Н. Г. Четаева)

Р. П. Мошкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается принцип Гаусса в работах самого К. Ф. Гаусса, Г. Шеффлера, И. И. Рахманинова, Е. А. Болотова, Н. Г. Четаева. Гауссу принадлежит только словесная формулировка принципа Гаусса. Аналитическое выражение принципа обычно связывают с именем Г. Шеффлера:

$$\delta Z\omega = \sum \frac{1}{m_i} \left[(X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i \right] = 0.$$

Впервые принцип Гаусса обобщил на системы со стационарными связями И. И. Рахманинов. Болотов дал обобщение принципа Гаусса.

Нелинейные неголономные системы работа Болотова не затрагивала. Следующий этап в обобщении принципа Гаусса связан с работами Н. Г. Четаева, относящимися к нелинейным неголономным системам.

Если в действительном движении проекции скоростей точек системы задаются формулами

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= a_i(t, q_s, \dot{q}_s),\\ \dot{y}_i &= b_i(t, q_s, \dot{q}_s),\\ \dot{z}_i &= c_i(t, q_s, \dot{q}_s),\end{aligned}$$

то в свободном движении — формулами

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= a_i(t, q_s, \dot{q}_s) + \alpha_i(t, q_s, \eta_r, \dot{\eta}_r),\\ \dot{y}_i &= b_i(t, q_s, \dot{q}_s) + \beta_i(t, q_s, \eta_r, \dot{\eta}_r),\\ \dot{z}_i &= c_i(t, q_s, \dot{q}_s) + \gamma_i(t, q_s, \eta_r, \dot{\eta}_r),\end{aligned}$$

где α_i, β_i, γ_i — произвольные функции указанных переменных, причем число новых переменных η_r равно числу новых свобод, приобретенных системой.

[1] Цыганова Н. Я. Основные этапы развития принципа наименьшего принуждения. В кн.: История и методология естественных наук, вып. 9. Механика, математика. — М.: МГУ, 1970. — 122–125.

УДК 531.36

О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивости

М. А. Муницына

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается задача о существовании, устойчивости и бифуркации стационарных движений системы двух взаимно гравитирующих тел, каждое из которых моделируется парой различных точечных масс, связанных невесомым нерастяжимым стержнем. Предполагается, что тела всегда находятся в одной плоскости, в которой

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00398) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2000.2003.1).

происходит движение. С помощью методики Рауса найдены семейства стационарных движений и исследована их устойчивость. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм. Доказано, что движения степени неустойчивости два неустойчивы по Ляпунову.

[1] Карапетян А. В., Шаракин С. А. О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивости. *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.* — 1992. — № 3. — 42–48.

УДК 531.396

Идеализированная модель вестибуло-окулярного рефлекса

Е. А. Муратова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Глаз человека может отчетливо видеть рассматриваемый объект, только если его образ практически неподвижен относительно сетчатки глаза и проецируется на ее центральную часть, называемую фовеа. При движениях головы главную роль в стабилизации взора играет взаимодействие вестибулярного и глазодвигательного аппаратов, называемое вестибуло-окулярным рефлексом. Предложена модель рефлекса, построенная на основе трехнейронной цепочки. Параметры модели имеют ясный физиологический смысл. Однако модель содержит матрицу связей вестибулярного и глазодвигательного центров, элементы которой неизвестны.

Для оценки элементов этой матрицы предложена идеализированная модель вестибуло-окулярного рефлекса. Это трехмерная модель для общего случая композиции мгновенного вращения вокруг произвольной оси и поступательного движения в произвольном направлении. Модель учитывает зависимость рефлекса от расстояния до мгновенной оси вращения и от расстояния до объекта.

Полученные соотношения носят кинематический характер и представляют собой идеализированные геометрические связи между движением головы и ответным вращением глаза, выполнение которых необходимо для стабилизации изображения объекта на сетчатке глаза при произвольных движениях головы.

В работе показано, что расстояния G_r и G_l от правого и левого глаз до объекта могут быть вычислены по положению глаз

$$G_r = \frac{\delta \cdot \cos\theta_l}{\sin(\theta_r - \theta_l)}, \quad G_l = \frac{\delta \cdot \cos\theta_r}{\sin(\theta_r - \theta_l)},$$

где δ — расстояние между центрами глаз, θ_r и θ_l — углы поворота глаз.

Идеализированный вестибуло-окулярный отклик задается уравнением

$$\omega = -\mathbf{\Omega} + \frac{\mathbf{G}}{G^2} \times \Big((\mathbf{e} - \mathbf{o}) \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{v}_O \Big),$$

где ω и $\mathbf{\Omega}$ — мгновенные угловые скорости глаза и головы, $\mathbf{G}$ — вектор, задающий направление взора, $\mathbf{e}$ и $\mathbf{o}$ — радиус-векторы глаза и лабиринта, $\mathbf{v}_O$ — абсолютная скорость центра головы.

Проведен компьютерный эксперимент, в котором смоделирована идеальная реакция на набор тестовых движений. В результате получены оценки значений элементов матрицы взаимосвязей.

УДК 519.21

О некоторых свойствах оператора Лапласа – Леви

М. Ю. Неклюдов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В докладе рассмотрен оператор Лапласа – Леви $\triangle_{PL}$ ([2], [3], [1]) на некоторых классах функций $H^n(\mathbb{R}^\infty)$ от бесконечного числа случайных независимых гауссовских величин и показано, что его поведение очень похоже на поведение оператора взятия производной. А именно, оказалось,что эти классы являются аналогами полиномов для оператора дифференцирования т. е. оператор Лапласа – Леви переводит “полиномы” степени n (класс $H^n(\mathbb{R}^\infty)$) в “полиномы” степени $n-1$(класс $H^{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$ соответственно). Это свойство оператора не зависит от выполнения формулы Лейбница. Данный подход позволяет нам явно найти “гармонические” функции для оператора Лапласа – Леви в классах “полиномов” 1-ой и 2-ой степени.

Пусть $\mu = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda_i^2}}}{\sqrt{2\pi}\lambda_i} dx_i$ — σ-аддитивная гауссовская продакт-мера на $\mathbb{R}^\infty$ с нулевым средним, $\triangle_{PL} f = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ п. н. — оператор Лапласа – Леви на своей естественной области определения $D \in L_2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$,

$$H^n(\mathbb{R}^\infty) = \Big\{ f \in L_2(\mathbb{R}^\infty, \mu) | f(x) = P_n(\varphi(x)),$$

$$P_n(x) \text{ — полином } n\text{-ой степени на } \mathbb{R}^\infty, \varphi : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty,$$

$$\varphi(x) = \{\varphi_j(x_j)\}_{j=1}^\infty, \text{ где } \varphi_j : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1 , j = 1, 2, \ldots \text{ — —}$$

множество функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\varphi_j \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^1), \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi_i'(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2\lambda_i^2}}}{\sqrt{2\pi}\lambda_i} dx < \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_j(x) x e^{-\frac{x^2}{2\lambda_j}} = 0, \lim_{x\to\infty} \varphi_j'(x) e^{-\frac{x^2}{2\lambda_j}} = 0, j = 1, 2, \ldots, \Big\};$$

$$A : H^1 \to H^1,$$

$$Af(x) = A(\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\frac{x_i^2}{\lambda_i^2} - 1) \frac{\varphi_i(x_i)}{\lambda_i^2}.$$

Теорема. $\triangle_{PL}(H^n(\mathbb{R}^\infty)) \subset H^{n-1}(\mathbb{R}^\infty)$
Утверждение. $f \in H^1(\mathbb{R}^\infty), \triangle_{PL} f(x) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} Af(x) d\mu(x) = 0.$

[1] Аккарди Л., Смолянов О. Операторы Лапласа-Леви в пространствах функций на оснащенных гильбертовых пространствах. *Матем. заметки.* — **72**, № 1. — 145–150.

[2] Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. — М.: Наука, 1967.

[3] Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy Laplacian. *Russ. J. Math. Phys.* — 1994. — **2**, № 2. — 235–250.

УДК 510.51

E-автоматная представимость булевых алгебр вида $B(\omega^n)$

А. В. Нечесов

Новосибирский государственный университет

В данное время широко начали исследоваться направления связанные с автоматной представимостью различных алгебраических структур. Общего подхода для доказательства автоматной представимости структуры нет, а потому для каждой структуры нужен свой подход. В 2003 году в работе Рубина было показано, что для булевых алгебр вида $B(\omega^n)$,при $n \geqslant 2$ не существует автоматного представления. Был поставлен вопрос: 'Каким же более широким классом будут распознаваться эти структуры?'. В данной статье приводится модификация конечного автомата — e-автомат, который был получен автором и обладает хорошими свойствами, при этом $B(\omega^n)$,при $n \geqslant 1$ становится распознаваемой.

Определение 1. n-Автомат над Σ — это конечный автомат над алфавитом $\{\Sigma_e\}^n$.

Определение 2. e-n-автомат над Σ — это автомат $A = (\Sigma, S, I, T, F)$, работающий по принципу конечного автомата над алфавитом $\{(s_1, \ldots, s_n)|$ где $s_i \in \{\Sigma \cup e\}\}$. Где e — пустой символ, который не появляется в слове. Это означает, что автомат может считывать символы из любых строк от 1 до n, а остальные оставлять на месте. При $n = 1$ мы получаем конечный автомат с бесшумными перемещениями.

Теорема 1. *Пусть L_1, L_2 — два e-автоматных языка. Тогда*

1) *$L_1 \cup L_2$,$L_1 \cap L_2$ и $C(L_1)$-e-автоматные языки, где C — дополнение.*
2) *Проекция также e-автоматна.*

Теорема 2. *Булева алгебра вида $B(\omega^n)$, $n \in N$, E-автоматно представима.*

[1] Blumensath A., Grädel E. Automatic structures. In: Proc. 15th IEEE symp. on Logic in Computer Science. — 2000. — 51–62.

[2] Khoussainov B., Nerode A. Automata theory and its applications. — Boston, 2001.

[3] Khoussainov B., Rubin S., Stephan F. Automatic linear orderings and trees. — CMDTS technical report 208, Department of Computer Science, University of Auckland. — 2003.

УДК 514.76

Направление электромагнитного поля и уравнения Максвелла

Р. Я. Низкий

Санкт-Петербургский государственный университет

Значение тензора ранга $(p, 0)$ в точке x многообразия M можно рассматривать как элемент подпространства p-векторов $\Lambda_p(T_x M)$ внешней алгебры над $T_x M$. Если в качестве модели пространства-времени взять пространство Минковского $M^4 = \mathbb{R}^4_{1,3}$, электромагнитное поле в точке $x \in M^4$ описывается контравариантным тензором электромагнитного поля $F(x) \in \Lambda_2(M_0)$, где M_0 — векторное пространство Минковского, отождествленное с $T_x M^4$ для каждого x.

Обозначим через $K_2 = \{v_1 \wedge v_2 \in \Lambda_2(M_0) | v_1, v_2 \in M_0\}$ конус простых бивекторов. Скалярное произведение в M_0 каноническим образом продолжается до скалярного произведения в $\Lambda(M)$, а $\Lambda_2(M_0)$ превращается в псевдоевклидово пространство с сигнатурой $(+++---)$. Множество $G^1 = \{\omega \in K_2 | \langle \omega, \omega \rangle = -1\}$ имеет структуру псевдориманова многообразия с сигнатурой $(++--)$, индуцированную вложением в $\Lambda_2(M_0)$. Элементы G^1 взаимнооднозначно соответствуют двумерным подпространствам M_0, содержащим времениподобное направление.

Оператор Ходжа $* : \Lambda_2(M_0) \to \Lambda_2(M_0)$ таков, что для широкого класса бивекторов $\varphi \in \Lambda_2(M_0)$ существуют единственные e, $h \in \mathbb{R}$, $\omega \in G^1$ такие, что $e > 0$ и $\varphi = e\omega + h(*\omega)$.

Таким образом, электромагнитное поле в области $U \subset M^4$ может быть описано с помощью отображений $e : U \to (0, +\infty)$, $h : U \to \mathbb{R}$, $\omega : U \to G^1$. Бивектор $\omega(x)$ будем называть *направлением электромагнитного поля* в точке x. Удается переписать в инвариантной форме уравнения Максвелла в вакууме так, что они используют только отображения e, h, ω и их дифференциалы. Рассмотрены вопросы существования решений уравнений Максвелла с постоянным ω (такие поля должны быть постоянными), с постоянными e и h (существуют такие поля, отличные от постоянных, для которых ω принадлежит геодезической в G^1).

Также вызывают интерес тот факт, что если представить $F(x)$ в виде суммы тензоров $F(x) = F_e(x) + F_h(x)$, где $F_e(x) = e(x)\omega(x)$, $F_h(x) = h(x)(*\omega(x))$, во многих случаях одно из слагаемых однозначно восстанавливается по другому из них.

УДК 531.38

Моделирование реакции рецепторов кажущегося ускорения

О. В. Никитина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Вестибулярный аппарат входит в состав сложной системы управления положением головы и тела в пространстве, обеспечивает сохранение равновесия и ориентацию в поле силы тяжести.

У млекопитающих рецепторная часть вестибулярного аппарата, а это три полукружных канала и два отолита, расположена во внутреннем ухе. Последнее находится в толще пирамиды височной кости и состоит из костного футляра и находящегося в нем перепончатого лабиринта. Между костными и перепончатыми частями находится пространство, заполненное перилимфатической жидкостью, полости же перепончатого лабиринта заполнены эндолимфой. Отолит представляет собой подвижную отолитовую мембрану большой плотности ($2{,}93 - 2{,}95$ г/см^3) и расположенный под ней рецепторный (сенсорный) эпителий — макулу.

Вестибулярный аппарат представляет собой биомеханическую систему, преобразующую механическую энергию угловых и линейных ускорений в сигналы о положении и движении тела в пространстве.

Одной из вероятных причин вегетативного дискомфорта и сенсорной неадекватности при сложном движении человека во вращающейся системе является воздействие на вестибулярный аппарат дополнительных линейных (кориолисовых) и угловых (прецессионных) ускорений.

Для исследования функций вестибулярного аппарата, в частности функций отолитов эффективно применяются методы математического моделирования.

В этой работе получена математическая модель, описывающая движение отолитовой мембраны во вращающихся системах с учетом некоторых особенностей структуры отолита.

Отолит представлен двумерным гармоническим осциллятором, масса которого сосредоточена в отолитовой мембране. В уравнение движения центра масс отолитовой мембраны входят следующие силы: сила тяжести, упругая сила, сила трения отолитовой мембраны о подмембранное пространство, нормальная (по отношению к плоскости макулы) составляющая сил реакции и сила Архимеда, действующая со стороны эндолимфы на отолитовую мембрану.

На основании двух экспериментов, проведенных в Научно-исследовательском институте военной медицины, получены отклики на возмущения как для саккулюсов, так и для утрикулюсов правого и левого отолитовых органов.

Для визуализации результатов построены графики, которые позволяют говорить об асимметрии реакции рецепторов ускорений.

УДК 517.987.4

Представление решения задачи Коши – Дирихле для уравнения Шредингера в виде интеграла Фейнмана

О. О. Обрезков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В данной работе получено представление решения задачи Коши – Дирихле для уравнения Шредингера с магнитным полем в области евклидова пространства в виде интеграла Фейнмана по траекториям в области.

Представление решения задачи Коши для уравнения Шредингера в евклидовом пространстве в виде интеграла Фейнмана [3] было получено в математических работах [4], [2]. Представление решения уравнения Шредингера с магнитным полем в виде континуального интеграла содержится в [1]. В данной работе рассмотрено уравнение Шредингера с магнитным полем в ограниченной области евклидова пространства и показано, что интеграл Фейнмана по траекториям в области соответствует решению задачи Коши-Дирихле с нулевыми граничными условиями.

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей. Рассмотрим краевую задачу Коши-Дирихле в этой области для уравнения, соответствующего оператору Шредингера с магнитным полем и потенциалом $H = \frac{1}{2}\left(-i\nabla + B(x)\right)^2 + V(x)$, где $V : G \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция (потенциал), $B : G \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно-дифференцируемая функция (вектор-потенциал магнитного поля). Решение задачи Коши – Дирихле с начальным условием $u_0 \in C_0(\overline{G})$ может быть представлено в виде интеграла Фейнмана по траектори-*

ям в G:

$$u(t,x) = \int\limits_{C_x([0,t],G)} e^{-i\int\limits_0^t \left(V(z(s))-\frac{i}{2}divB(z(s))\right)ds+i\int\limits_0^t (B(z(s-0))\,dz(s))} \times$$

$$\times\, u_0(z(t))\Phi_G^x(dz),$$

где Φ_G^x — (определяемая как предел конечнократных интегралов) псевдомера Фейнмана, сосредоточенная на траекториях $z \in C([0,t],G)$, таких что $z(0)=x$.

В доказательстве существенную роль играет теорема Чернова [5].

[1] Колокольцов В. Н. Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами и магнитными полями. *Матем. сборник.* — 2003. — **194**, № 6. — 105–126.

[2] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. — М.: МГУ, 1990.

[3] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.

[4] Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman integrals. (Lecture Notes in Math., **523**. — Berlin: Springer, 1976.

[5] Chernoff R. A note on product formulas for operator semigroups. *J. Funct. Anal.* — 1968. — **2**. — 238–242.

УДК 515.12

Наследственно совершенно κ-нормальные пространства

Е. В. Осипов

Петрозаводский государственный университет

Совершенно κ-нормальные пространства были введены в работах Е. В. Щепина [1]. Они появлялись как G_δ-подмножества в κ-метризуемых компактах, соответственно, сам κ-метризуемый компакт является совершенно κ-нормальным.

Определение 1. Топологическое пространство X называется *совершенно κ-нормальным*, если оно нормально и каждое его канонически открытое множество является F_σ-подмножеством.

Из определения следует, что каждое совершенно нормальное пространство является совершенно κ-нормальным пространством.

Определение 2. Пространство X называется *наследственно совершенно κ-нормальным пространством*, если каждое его подмножество является совершенно κ-нормальным пространством.

Каждое канонически открытое и канонически замкнутое множество в совершенно κ-нормальном пространстве будет совершенно κ-нормальным пространством, но, вообще говоря, таковыми не будут произвольные замкнутые и открытые множества.

Теорема 1. *Совершенно κ-нормальное пространство является наследственно совершенно κ-нормальным тогда и только тогда, когда X наследственно нормально.*

Теорема 2. *Совершенно κ-нормальное пространство является наследственно совершенно κ-нормальным пространством тогда и только тогда, когда каждое его замкнутое множество является совершенно κ-нормальным.*

В работе рассмотрены примеры, показывающие несовпадения класса наследственно совершенно κ-нормальных пространств с другими классами.

Пример 1. Существует наследственно нормальный компакт, не являющийся совершенно κ-нормальным пространством.

Пример 2. Существует совершенно κ-нормальное пространство, не являющееся наследственно совершенно κ-нормальным пространством.

Пример 3 ($\diamond$). Существует компакт, который является наследственно совершенно κ-нормальным пространством и не является совершенно нормальным.

В работе показано, что перечисленными в примере 3 свойствами обладает компакт, построенный в предположениях принципа Йенсена в работе [2]. Вопрос о существовании такого примера в наивной теории множеств остается открытым.

[1] Щепин Е. В. О κ-метризуемых пространствах. *Известия АН СССР. Сер. Матем.* — 1979. — **43**, вып. 2. — 442–478.

[2] Федорчук В. В. Совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств. *Матем. сб.* — 1976. —**99**, вып. 1. — 5–45.

УДК 515.12

Оптимизация в страховых премиях

И. Петрова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается проблема определения оптимальных страховых взносов, и изучается модель страхования в области, не связанной с жизнью.

Изначально, была предложена линейная модель для определения размеров страховых взносов в течение последовательных лет в отрасли не связанного с жизнью бизнеса страхования. В этой модели размер страховых взносов в следующем году рассчитывается исходя из знания затрат по требованиям за предыдущие годы и предполагаемых затрат в следующем. При этом размер страхового взноса мы хотим знать в начале года, а затраты по требованиям за этот год мы узнаем только в его конце. Предполагается, что можно получить устойчивую оценку для затрат в течение некоторого срока, на который заключается договор страхования. Кроме того, должен учитываться риск банкротства, а сами страховые взносы не должны слишком сильно колебаться с течением времени.

Предполагается, что нам известен заранее установленный премиальный уровень в каждом году, а также вероятности банкротства за эти годы.

Таким образом, с математической точки зрения для нахождения оптимальных страховых взносов нам нужно минимизировать среднее квадратическое уклонение, связывающее все известные нам величины.

Задача была формализована так, что, применив метод Лагранжа, мы смогли найти оптимальные коэффициенты для уравнения страховых взносов. При этом показано, что эти коэффициенты найдены точно, так как мы рассматривали их как переменные и находили их оптимальные значения, а не изменяли их значения, чтобы потом выбрать лучший вариант.

Таким образом, мы нашли эти коэффициенты в явном виде, то есть решили именно ту задачу, которую и ставили перед собой.

УДК 539.8

Алгоритмы оценивания скорости заноса автомобиля с АБС

Ю. А. Платонов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Доклад посвящен вопросу построения алгоритма, позволяющего определить момент начала заноса автомобиля, оборудованного антиблокировочной системой (АБС), при торможении на "миксте".

Рассматривается работа АБС, снабженной только датчиком угловой скорости вращения колес. В АБС используется циклический режим торможения. *"Микстом"* называется участок дороги с резким различием коэффициентов сцепления для левых и правых колес.

Для построения алгоритма предполагается, что руль автомобиля в момент торможения неподвижен, и колеса установлены прямо. Также предполагается, что боковые составляющие контактных сил взаимодействия колес с дорогой пренебрежимо малы по сравнению с продольными составляющими этих сил.

В дискретные моменты времени производятся измерения ненулевых скоростей вращения колес, с помощью которых вычисляются величины проекции скорости центров колес на продольную ось автомобиля.

В работе построен оцениватель, позволяющий определить угловую скорость рыскания корпуса автомобиля. Для построения наблюдателя использован дискретный фильтр Калмана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 04-01-00759.

УДК 539.8

Инварианты Громова – Виттена гладких трехмерных многообразий Фано

В. В. Пржиялковский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Самым простым и естественным классом алгебраических многообразий является класс *гладких многообразий Фано*, то есть таких многообразий, у которых антиканонический класс $-K_X$ обилен. В размерности один это только $\mathbb{P}^1$, двумерные многообразия Фано — поверхности Дель-Пеццо — умели классифицировать еще итальянские геометры в 19 веке, ответ в размерности три дали В. А. Исковских и японские геометры, ответ в больших размерностях пока не известен.

Однако сейчас появляется новый подход к классификации многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. У многообразия Фано есть численные инварианты — *инварианты Громова – Виттена*, то есть числа рациональных кривых данной степени, пересекающих данные гомологические классы. Они "пакуются" в *кольцо квантовых когомологий* — деформацию кольца когомологий многообразия. В нем в качестве структурных констант взяты инварианты Громова–Виттена. По этим константам строится дифференциальное уравнение, называемое $D3$-уравнением (для трехмерных многообразий Фано с одномерной группой Пикара). Гипотеза, высказанная В. Голышевым, состоит в модулярности решения этого уравнения.

Справедливость этой гипотезы означала бы, что зеркальный метод достаточно силен для того, чтобы воспроизвести классификацию Исковских, оперируя с дифференциальными уравнениями.

Для проверки этой гипотезы необходимо найти все двухточечные инварианты для трехмерных многообразий Фано.

А именно, для каждого многообразия V нужно найти матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{i,j} = (1/\deg(V))\cdot(j-i+1)\cdot(\textit{число рациональных кривых степени } j-i+1,\ \textit{пересекающих } H^{3-i} \textit{ и } H^j),$$

а H — класс гиперплоского сечения (степени везде подразумеваются относительно антиканонического класса). Числа *прямых* (стоящие на главной диагонали) были подсчитаны мной геометрически для почти всех многообразий. В вычислениях использовалось данное Ш. Мукаи описание трехмерных многообразий Фано как сечений некоторых пучков на грассманианах; для полных пересечений были найдены также числа коник. Для всех инвариантов полных пересечений и многообразий V_5, V_{10} и V_{14} применим подход, основанный на так называемой зеркальной формуле (mirror formula). Способ перейти от инвариантов Громова – Виттена многообразия к инвариантам гиперповерхности в нем, придуманный А. Гатманном, состоит в следующем. Пусть нам дано многообразие X и гладкая гиперповерхность $Y \subset X$. Требуется найти одноточечные инварианты Громова – Виттена Y. Для произвольного класса $\beta \in H_2(X)$ рассмотрим $\bar{M}_1(X, \beta)$ — стек Делиня – Мамфорда стабильных отображений β в X с одной отмеченной точкой. Рассмотрим также пространства $\bar{M}_{(m)}(X, \beta) \in \bar{M}_1(X, \beta)$ — подпространства отображений, в которых отмеченная точка имеет кратность не меньше m на Y. Ясно, что если кривая в отмеченной точке имеет кратность не меньше $Y \cdot \beta + 1$ на Y, то она на нем лежит. Таким образом, мы имеем цепочку

$$\bar{M}_1(Y, \beta) \subset \bar{M}_{(Y \cdot \beta)}(X, \beta) \subset \ldots \subset \bar{M}_{(1)}(X, \beta) \subset \bar{M}_1(X, \beta).$$

Метод Гатманна позволяет описывать каждое включение (ожидаемой коразмерности 1) в терминах умножения на когомологический класс. А так как инварианты Громова – Виттена тоже описываются в терминах когомологических классов на $\bar{M}_1(X, \beta)$, то мы можем выразить инварианты Y в терминах инвариантов X (то есть для перечисленных многообразий — $\mathbb{P}^n$ и грассманианов), которые известны.

Осталось воспользоваться формулами А. Бертрама, восстанавливающими нужные нам *двухточечные* инварианты по известной системе *одноточечных.*

УДК 517.977

Аппроксимативная управляемость параболических уравнений с управлением, зависящим лишь от времени

М. А. Прибыль

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная связная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, ω — некоторая подобласть Ω. Для параболического уравнения рассмотрим смешанную краевую задачу с управлением

$$\partial_t y(t,x) + Ly = \theta_\omega(x) f(x) u(t), \quad (t,x) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$y(t,x)|_{t=0} = y_0(x), \tag{2}$$

$$y(t,x)|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

где $u(t) \in \mathbb{L}_2(0,T)$ — управление, $\theta_\omega(x) = 1$, если $x \in \omega$ и $\theta_\omega(x) = 0$, если $x \notin \omega$, $y_0 \in \mathbb{L}_2(\Omega)$. Эллиптический оператор L имеет вид

$$Ly \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} y(t,x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_{x_i} y(t,x) + c(x)y(t,x),$$

где коффициенты $a_{ij}(x), b_j(x), c(x)$ — вещественнозначные дважды непрерывно дифференцируемые функции в замыкании Ω и для некоторого $\alpha > 0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \Omega.$$

Определение [1]. Задача (1)–(3) называется $\mathbb{L}_2$-аппроксимативно управляемой относительно класса управлений $U = \{u \in \mathbb{L}_2(0,T)\}$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $y_1 \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ существует управление $u \in U$ такое, что решение y задачи (1)–(3) с управлением u удовлетворяет условию $\|\gamma_T y - y_1\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} < \varepsilon$.

Пусть оператор L имеет дискретный простой спектр.

Теорема. *Существует $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, такая что задача (1) – (3) $\mathbb{L}_2$-аппроксимативно управляема.*

[1] Фурсиков М. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

УДК 517.956.224

Об уравнении Гельмгольца на плоскости с разрезами, когда условие Дирихле и условие Неймана заданы на разных сторонах разрезов

К. В. Прозоров

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В работах [1], [2] были изучены задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости.

В настоящей работе изучается краевая задача для уравнения Гельмгольца $\triangle u + k^2 u = 0$, $0 \leqslant \arg k < \pi$, вне разрезов на плоскости. При этом на одной стороне каждого разреза задается условие Дирихле, а на другой — условие Неймана. Если $\arg k = 0$, т.е. $k = \operatorname{Re} k > 0$, то на бесконечности потребуем выполнение условий излучения Зоммерфельда: $\partial u(x)/\partial |x| - iku(x) = o\left(|x|^{-1/2}\right)$, $|u(x)| = O\left(|x|^{-1/2}\right)$. Если $0 < \arg k < \pi$, т.е. $\operatorname{Im} k > 0$, то на бесконечности потребуем выполнение следующих условий: $|u(x)| = o\left(|x|^{-1/2}\right)$, $|\nabla u| = o\left(|x|^{-1/2}\right)$. Искомая функция должна также удовлетворять определенным условиям гладкости.

С помощью метода энергетических тождеств доказывается теорема единственности. Доказана теорема существования решения краевой задачи. С помощью потенциала простого слоя и неклассического углового потенциала задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями. Посредством регуляризации и дальнейших преобразований эта система сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая оказывается однозначно разрешимой.

В работе получены явные асимптотические формулы для градиента решения краевой задачи на концах разрезов. Частные производные решения задачи могут иметь на концах разрезов степенные особенности с показателем не более $3/4$.

[1] Крутицкий П. А. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* — 1994. — **34**, № 8-9. — 1237–1258.

[2] Крутицкий П. А. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* — 1994. — **34**, № 11. — 1652–1665.

УДК 371.26:004.428.4

Некоторые аспекты построения универсальной системы проверки знаний

Т. В. Пустовой

Донецкий национальный университет

На территории постсоветского пространства сейчас проходит тестовый бум. Яркий пример тому — ЕГЭ в России, а также внешнее тестирование в Украине. Теория построения тестовых заданий и тестов достаточно хорошо описана в литературе. Эта статья посвящена проблемам обеспечения технической поддержки тестирования, то есть создание систем компьютерного тестирования и обработки информации. Основные моменты создания тестирующих систем достаточно хорошо рассмотрены в литературе, поэтому хотелось бы обратить внимание на специфические возможности, которыми должна обладать система, претендующая на право называться универсальной [1]. После анализа предметной области, выявления общих схем различных видов тестирования и построения модели тестового комплекса, хотелось бы выделить следующие его особенности:

Одно из наиболее перспективных видов тестирование это **адаптивное** тестирование, при котором испытуемый получает последующие задания в зависимости от ответа на предыдущие [2]. Тестовых вопросов делятся на уровни сложности. Задаются правила *адаптивности*, определяющие условия перехода на уровень вверх или вниз, а также задается шаг *адаптивности* — количество вопросов, через которое будут проверяться эти правила

Многокритериальный подход к построению тестов, позволяет получать оценки нескольких характеристик тестируемого за один проход теста. Каждый вопрос может влиять на один или несколько *критериев*.

Организация базы заданий. Каждый вопрос в базе заданий классифицируется по нескольким характеристикам — **атрибутам** (год, автор, тема), База вопросов может быть отображена различными способами (**представлениями**) в зависимости от анализа последовательности атрибутов идет анализ

Интегрированность результатов тестирования и базы заданий. На основании реальных полученных результатов можно совершенствовать тесты, определять реальную сложность заданий.

Сценарии теста позволяет описывать ход тестирования при помощи специальных команд. Он может быть задан или изменен непосредственно перед самим тестированием средствами клиентской программы

Генерация **бланковых** тестов, используя те же принципы что и при построении компьютерных, позволяет, основываясь на выборке вопросов и сценарии, получить бланковые варианты теста.

Универсализация ответа на вопрос. Разбивая множества всевозможных ответов на вопрос на подмножества — супрответы, и ставя в соответствие каждому их таких подмножеств способы изменения критериев, мы получаем возможность гибко и однотипно задавать правильные ответы на различные типы вопросов, задавать "полуправильные ответы", произвольно назначать веса различным ответам на вопрос.

Параллельность заданий тестов. Для обеспечения надежности тестирования каждое задание в тесте должно иметь несколько параллельных заданий, одинаковых по уровню сложности, тематике, подходу к решению. Каждое из таких заданий называется *вариантом* вопроса.

Защита от угадывания обеспечение **непротиворечивости** ответов на вопрос. Для этого вопросы объединяются в группы зависимости, при этом ответ на каждый вопрос из группы сопоставляется с ответами на остальные вопросы группы.

Основываясь на полученных результатах, создан программный комплекс, предназначенный для проведения компьютерного тестирования, анализа результатов, генерации бланковых тестов, ведения базы заданий. Комплекс был создан по заказу центра математического и компьютерного образования МИВТ и используется в процессе обучения школьников математике.

[1] Нардюжев В. И., Нардюжев И. В. Современные системы компьютерного тестирования. *Информатика и образование.* — 2001. — **37**, № 2. — 101–115.

[2] Mislevy R. I. Test Theory Reconceived. — CSE Technikal Report, № 376. Los Angeles, CA: CRESST/ Eduation Testing Service, 1994.

УДК 517.938

Центр и глубина центра непрерывных отображений дерева

В. В. Редкозубов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть T дерево, f непрерывное отображение T в себя. Обозначим через $P(f)$, $R(f)$ и $\Omega(f)$ множество периодических, рекуррентных и неблуждающих точек отображения f соответственно. Замыкание $\overline{R(f)}$ известно как центр отображения f — $C(f)$. Понятие центра играет принципиальную роль в теории динамических систем. Например, известно, что для любого открытого множества $U \supset C(f)$ и любой точки $x \in T$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Card}\{i \leqslant n : f^i(x) \in U\} \cdot n^{-1} = 1,$$

т. е. орбита любой точки "проводит почти все время" в сколь угодно малой окрестности центра.

Как показал Шарковский [2], для отображений отрезка центр совпадает с замыканием $\overline{P(f)}$ и глубина центра не превосходит 2. В работе [4] этот результат распространен на случай отображений окружности, в работе [3] — на случай отображений связных линейно упорядоченных пространств. В данной статье устанавливается справедливость этого утверждения в случае отображений дерева.

Теорема 1. *Если $f : T \to T$ непрерывно, то центр $C(f)$ совпадает с $\overline{P(f)}$ и глубина центра не превосходит 2.*

Теорема вытекает из следующего утверждения.

Предложение 1. *Всякая неизолированная точка из $\Omega(f)$ неизолирована и во множестве $P(f)$.*

Доказательство проводится в духе рассуждений Блоха [1], однако напрямую не использует его спектральную теорему.

Доказанная теорема уточняет следующий результат Е Сян Дуна [5]: глубина отображения дерева не превосходит 3.

[1] Блох А. М. Разложение динамических систем на интервале. *УМН.* — 1983. — **38**, № 5. — 865–868.

[2] Шарковский А. Н. Неблуждающие точки и центр непрерывного отображения прямой в себя. *Доп. Акад. Наук Укр. РСР.* — 1964. — 865–868.

[3] Alcaraz D. Recurrent points of continuous functions on connected linearly ordered spaces. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste.* — 1999. — **XXX**. — 1–9.

[4] Coven E., Mulvey I. Transitivity and the center for maps of the circle. *Ergod. Theor. Dynam. Sist.* — 1986. — **6**, № 1. — 1–8.

[5] Ye X. D. The center and the depth of the center of a tree map. *Bull. Austral. Math. Soc.* — 1993. — **48**, № 2. — 347–350.

УДК 510.6

Подстановочная полнота интуиционистского исчисления высказываний относительно некоторых алгебраических теорий

А. В. Романов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Нас интересует вопрос о логической структуре теорий. Именно, рассмотрим некоторую интуиционистскую теорию первого порядка T. Естественно задать вопрос, какие схемы общезначимы в T? Здесь нас интересует случай схем в языке исчисления высказываний. Обзор результатов в этой и смежных областях можно найти в [1].

Введем необходимые определения и обозначения. Язык теории T обозначается через $\mathcal{L}_T$. *Схема* — это формула в языке исчисления высказываний $\mathcal{L}_H$. *Подстановка в* $\mathcal{L}$ — отображение из $\mathcal{L}_H$ в $\mathcal{L}$, дистрибутивное над пропозициональными связками. Схема φ *подстановочно общезначима* в T, если для всякой подстановки σ в $\mathcal{L}_T$ $\sigma(\varphi)$ доказуемо в T. Легко видеть, что множество схем, подстановочно общезначимых в T, является суперинтуиционистской логикой. Оно называется *пропозициональной логикой* T и обозначается $IL(T)$. Для каждой подстановки σ в $\mathcal{L}_T$ рассмотрим также σ*–теорию* T — множество схем φ таких, что $\sigma(\varphi)$ доказуемо в T.

Если пропозициональная логика T совпадает с H, где H — интуиционистское исчисление высказываний, то мы скажем, что H *подстановочно полно относительно* T. Если для некоторой подстановки σ в $\mathcal{L}_T$ H — σ–теория T, то мы скажем, что что H *равномерно подстановочно полно относительно* T.

Нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *H равномерно подстановочно полно относительно многих интуиционистских алгебраических теорий (включая теории групп, колец и полей).*

Теорема 2. *H подстановочно полно относительно всех теорий равенства между интуиционистской теорией равенства и интуиционистской теорией разрешимого равенства.*

Теорема 3. *H не равномерно подстановочно полно относительно интуиционистской теории разрешимого равенства.*

[1] Visser A. Rules and arithmetics. — Internet: `http://citeseer.ist.psu.edu/visser98rules.html`.

УДК 514.76

Об одном приеме построения инвариантных структур классического типа на однородных пространствах, порожденных полупрямым произведением групп Ли

Ю. Я. Романовский

Гродненский государственный университет

В работе [1] указан критерий существования и способ построения всех канонических аффинорных структур классического типа на регулярных Ф–пространствах. Вопрос о существовании других, не канонических аффинорных структур остается открытым. Однако, возникает вопрос, можно ли используя способ получения канонических структур получить не канонические структуры. В данной работе приводится примеры не канонических аффинорных структур классического типа на регулярном Ф–пространстве, порожденного полупрямым произведением групп Ли, которые построены по каноническим аффинорным структурам классического типа.

Рассмотрим группу Ли $G_1 = \mathbb{C}^3 \times |SU(3)$, где $\times|$ — полупрямое произведение групп Ли [3].

Пусть $G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & E_3 \end{pmatrix} |\alpha \in \mathbb{C}^3 \right\}$ и $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} |a \in SU(3) \right\}$, тогда группу Ли G_1 удобно представить в следующем матричном виде $G_1 = G_0 \times G = \{k \cdot h | k \in G_0, h \in G\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & a \end{pmatrix} |\alpha \in \mathbb{C}^3, a \in SU(3) \right\}$.

Определим на G_1 следующие структуры G–пространства

а) $\eta_1 : G_1 \times G_1 \to G_1 : (g, a) \to g a \Phi_1(g^{-1})$ (G_1 с такой структурой обозначим G_1^1), где $\Phi_1 : G_1 \to G_1$, $g \to \widetilde{s}\widetilde{g}\widetilde{s}^{-1}$, $\widetilde{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $s =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\eta_2 : G_1 \times G_1 \to G_1 : (g,a) \to ga\Phi_2(g^{-1})$ (G_1 с такой структурой обозначим G_1^2), где $\Phi_2 : G_1 \to G_1$, $g \to \widetilde{s}\Psi(\overline{g})\widetilde{s}^{-1}$, $\Psi : G_1 \to G_1, k \cdot h \to h$.

Орбита единицы в пространстве G_1^1 изоморфна регулярному Φ–пространству порядка 4 $G_1/_{H_1}$, где $H_1 = G_1^{\Phi_1}$.

Каноническое редуктивное разложение [2] алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ соответствующее ее автоморфизму $(d\Phi_1)_e$ имеет вид

$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{m}_1$, где

$$\mathfrak{h}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix} \mid \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & di & z+ei \\ 0 & -z+ei & -di \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix} \mid \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_2 i \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C},\right.$$

$$\left. A = \begin{pmatrix} ai & bi+x & ci+y \\ bi-x & -\frac{a}{2}i & 0 \\ ci-y & 0 & -\frac{a}{2}i \end{pmatrix} \right\}.$$

В работе [1] для Φ–пространств порядка 4 указаны вычислительные формулы канонических аффинорных структур классического типа, которые для пространства $G_1/_{H_1}$ примут вид:

$f_1 : \mathfrak{m}_1 \to \mathfrak{m}_1, f_1(X) = \frac{1}{2}(\widetilde{s}\overline{X}\widetilde{s}^{-1} - \widetilde{s}^{-1}\overline{X}\widetilde{s})$ — оператор определяющий каноническую f–структура дефекта 2;

$P_1 : \mathfrak{m}_1 \to \mathfrak{m}_1, P_1(X) = \widetilde{s}^2 X \widetilde{s}^{-2}$ — оператор определяющий каноническую структура почти произведения.

Орбита единицы в пространстве G_1^2 изоморфна регулярному Φ–пространству $G_1/_{H_2}$, где $H_2 = G_1^{\Phi_2}$.

Каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ соответствующее ее эндоморфизму $(d\Phi_2)_e$ имеет вид

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{m}_2, \text{ где } \mathfrak{h}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & di & z+ei \\ 0 & -z+ei & -di \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{m}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix} \mid \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3,\ A = \begin{pmatrix} ai & bi+x & ci+y \\ bi-x & -\frac{a}{2}i & 0 \\ ci-y & 0 & -\frac{a}{2}i \end{pmatrix} \right\}.$$

Теорема. *На $G_1/_{H_2}$ оператор $f_2 : \mathfrak{m}_2 \to \mathfrak{m}_2, f_2(X) = \frac{1}{2}(\widetilde{s}\overline{X}\widetilde{s}^{-1} - \widetilde{s}^{-1}\overline{X}\widetilde{s})$, определяет инвариантную f–структуру дефекта 3, а оператор $P_2 : \mathfrak{m}_2 \to \mathfrak{m}_2, P_2(X) = \widetilde{s}^2 X \widetilde{s}^{-2}$ — инвариантную структуру* *почти произведения.*

[1] Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ–пространствах. *Матем. сборник.* — 1995. — **186**, № 11. — 3–34.

[2] Степанов Н. А. Основные факты теории φ–пространств. *Известия ВУЗов. Математика.* — 1967. — № 3. — 88–95.

[3] Степанов Н. А. φ–пространства полупрямых произведений групп Ли. *Известия ВУЗов. Математика.* — 1983. —№ 10. — 64–73.

УДК 517.9

О подобии оператору свертки в пространстве Соболева

Г. С. Ромащенко

Донецкий национальный университет

В настоящей заметке изучается подобие вольтеррова оператора

$$K : f \to \int_0^x K(x-t)f(t)\,dt \tag{1}$$

оператору дробного интегрирования

$$J^\alpha : f \to \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

в пространстве $W_p^s[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $s > 0$.

Подобие оператора Вольтерра степеням оператора интегрирования J^n в пространствах $L_p[0,1]$ исследовалось многими авторами, начиная с работ Сахновича и Калиша.

В работе применяется метод, предложенный в [1].

Теорема 1. *Пусть $K(\cdot) \in W_p^{\alpha+s-2}[0,1] \cap W_{p,0}^{\alpha}[0,1] \cap W_1^2[0,1]$ и $\alpha > s - \frac{1}{p}$ или $\alpha \in \mathbb{N}$. Тогда оператор*

$$J^\alpha + K : f \to \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + \int_0^x K(x-t)f(t)\,dt \tag{3}$$

подобен оператору J^α в пространстве Соболева $W_p^s[0,1]$, $p \in [1,+\infty]$, $s > 0$.

[1] Маламуд М. М. Спектральный анализ вольтерровых операторов с ядром, зависящим от разности аргументов. *Украин. Мат. Журнал.* — 1980. — **32**, № 5. — 601–609.

УДК 510.66

О логике доказательств с операцией подстановки

Н. М. Рубцова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Язык логики доказательств с операцией подстановки LPS_{sub} содержит три типа переменных: пропозициональные переменные $S_1, S_2, \ldots$, переменные по доказательствам $p_1, p_2, \ldots$ и ссылки $x_1, x_2, \ldots$. Имеются также булевы связки, функциональные символы $\mathsf{subst_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ и два операторных символа: оператор доказательств $[\![\cdot]\!](\cdot)$ и оператор ссылок $(\cdot) \ni (\cdot)$. Термы строятся из переменных по доказательствам и ссылок при помощи функциональных символов: если t — терм, x — ссылка, то $\mathsf{subst_i}(x; t)$ — терм. Формулы строятся из пропозициональных переменных при помощи булевых связок (стандартно) и операторов: если t — терм, x — ссылка и A — формула, то $[\![t]\!]A$ и $x \ni A$ – формулы. При этом операторы связывают все пропозициональные переменные, встречающиеся свободно в формуле A. Пусть $A(\overrightarrow{B}/\overrightarrow{S})$ означает результат подстановки формул из списка $\overrightarrow{B}$ вместо свободных вхождений соответствующих переменных из списка $\overrightarrow{S}$ в формулу A.

Аксиомами логики LPS_{sub} являются классические пропозициональные аксиомы, аксиома рефлексии $[\![t]\!]A \to A(\overrightarrow{B}/\overrightarrow{S})$ и счетное множество операторных аксиом $x \ni B \wedge [\![t]\!]A \to [\![\mathsf{subst_i}(x; t)]\!]A(B/S_i)$. Единственное правило вывода — *modus ponens*.

Неформально, $[\![t]\!]A$ означает “t доказывает схему A”, а операция $\mathsf{subst_i}$ преобразует доказательство схемы в доказательство ее подстановочного примера, для чего ей передается дополнительный параметр – код подставляемой формулы. В работе предлагается вариант формализации указанной семантики (арифметическая интерпретация) и доказывается корректность LPS_{sub} относительно этой семантики.

Кроме того, установлена разрешимость логики LPS_{sub}. Разрешающий алгоритм основан на другой, символической семантике, относительно которой LPS_{sub} не только корректна, но и полна.

УДК 510.66

Экстремальные задачи на бесконечных путях графа

А. Н. Сафиуллин

Работа посвящена рассмотрению различного рода экстремальных задач на множестве бесконечных путей взвешенного конечного орграфа. Под бесконечным путем понимается бесконечная последовательность ребер графа такая, что любое ее начало конечной длины является путем в данном графе. Стоимость конечного пути в графе естественным образом определяется как сумма стоимостей входящих в путь ребер. В работе формулируются две задачи поиска экстремального в некотором смысле бесконечного пути на множестве всех бесконечных путей, выходящих из заданной вершины.

Первая задача — это так называемая оптимальность в слабом смысле. Бесконечный путь является оптимальным в слабом, если для любого натурального n начало пути длины n, соединяющее начальную вершину v_0 с некоторой вершиной v_n принадлежит множеству минимальных по стоимости путей длины n, соединяющих данные вершины. В статье поставлена задача нахождения оптимального пути в слабом, выходящего из данной вершины. При решении данной задачи получены следующие результаты: если для данной вершины существует выходящий из нее бесконечный путь, то, во-первых, существует оптимальный в слабом путь, выходящий из нее, и, во-вторых, существует оптимальный в слабом путь, последовательность ребер которого содержит периодическую часть. Такие пути названы “рациональными” по аналогии с рациональными числами. В заключении в работе доказано существование алгоритма нахождения для данной точки выходящего из нее рационального пути, являющегося оптимальным в слабом.

Вторая задача — задача нахождения абсолютно оптимального пути, выходящего из данной вершины. Под абсолютно оптимальным путем с заданной начальной вершиной понимается бесконечный путь, выходящий из этой вершины, стоимость любого конечного начала которого меньше стоимости начала той же длины любого другого бесконечного пути, выходящего из той же вершины. При решении этой задачи были получены следующие результаты: если существует абсолютно оптимальный путь выходящий из данной вершины, то существует и рациональный абсолютно оптимальный путь, выходящих из той же вершины. Кроме того, было доказано существование алгоритма, находящего рациональный абсолютно оптимальный путь, выходящий из данный вершины, или определяющего, что такого пути не существует (а значит, задача на абсолютную оптимальность не имеет решения).

В заключение следует отметить, что рассмотрение бесконечных путей графа и экстремальных задач на них является открытой темой для изучения. Данная работа является первой публикацией на эту тему, и до этого исследования в этой области не проводились.

УДК 517.958

Поведение градиента решения в смешанной задаче с косой производной для гармонических функций вне разреза

А. И. Сгибнев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

На плоскости $x = (x_1, x_2)$ рассмотрим простую разомкнутую кривую Γ класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$ с началом a и концом b. Пусть плоскость разрезана вдоль кривой Γ. Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу G, если она дважды непрерывно дифференцируема на плоскости вне разреза Γ и непрерывно продолжима на левый и правый берега разреза, исключая концы, на которых может иметь интегрируемые особенности.

Задача $\mathcal{S}$. Найти функцию $u(x)$ из класса G, гармоническую в $R^2 \setminus \Gamma$, удовлетворяющую граничным условиям

$$u(x)|_{x(s)\in\Gamma^+} = f^+(s), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial u}{\partial \tau_x}\right)\bigg|_{x(s)\in\Gamma^-} = f^-(s), \qquad (1)$$

и условиям на бесконечности

$$u(x) = A \ln|x| + O(1), \quad \partial u/\partial|x| = A|x|^{-1} + O(|x|^{-2}) \quad |x| \to \infty. \ (2)$$

Здесь $f^+(s), f^-(s)$ – известные функции, A и β – заданные константы, $\mathbf{n}_x$ и τ_x– нормаль и касательная к кривой в точке x.

Решение задачи $\mathcal{S}$ существует, единственно и представимо в виде потенциалов [1].

Теорема 1. *Пусть $x \to b$, где b — конец разреза. Справедлива формула*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\bigg|_{x\to b} = \frac{p_j(b)}{|x-b|^{1/2+\eta}} + \frac{q_j(b)}{|x-b|^{\eta}} + O(1),$$

где $\eta = (1/(2\pi))\operatorname{arcctg}\beta \in (0, 1/2)$, $p_j(b)$ *и* $q_j(b)$ *— непрерывные функции угла подхода к* b, $j = 1, 2$.

Похожая формула имеет место и при $x \to a$, только показатели особенностей будут равны $1 - \eta$ и $1/2 - \eta$.

[1] Сгибнев А.И. Смешанная задача с косой производной для гармонических функций вне разреза. — В кн.: Труды XXV Конференции молодых ученых механико-матем. ф-та МГУ. — М.: МГУ, 2003.

УДК 519.21

Критерии безарбитражности для экспоненциальных моделей Леви

А. В. Селиванов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В финансовой математике важную роль играет вопрос о безарбитражности различных моделей эволюции цен. В докладе мы даем ответ на этот вопрос для двух моделей, популярных в современной теории:

1. Экспоненциальная модель Леви, т. е. модель, в которой процесс дисконтированной цены имеет вид
$$S_t = e^{X_t}, \tag{1}$$
где X — процесс Леви.

2. Экспоненциальная модель Леви с заменой времени, т. е. модель, в которой процесс дисконтированной цены имеет вид
$$S_t = e^{(X \circ \tau)_t}, \tag{2}$$
где X — процесс Леви, τ — независимый неубывающий процесс, $(X \circ \tau)_t = X_{\tau_t}$.

В случае непрерывного времени понятие безарбитражности может быть введено различными способами. Мы рассматриваем два из них: традиционный, предложенный в [2] (а именно, понятие «no free lunch with vanishing risk») и альтернативный, предложенный в [1] (понятие «no generalized arbitrage»). Согласно фундаментальной теореме теории арбитража, наличие арбитража тесно связано с пустотой некоторых классов мартингальных мер. Мы исследуем вопрос о пустоте этих классов, а также о единственности меры в этих классах.

В результате мы получаем критерии безарбитражности для модели (1) с конечным и бесконечным временным горизонтом и для модели (2) с конечным временным горизонтом.

[1] Cherny A. S. General arbitrage pricing model: probability and possibility approaches. Manuscript, 2004.

[2] Delbaen F., Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Ann.* — 1998. — **312**, № 2. — 215–250.

УДК 531.36

Сравнение двух форм описания нестационарного взаимодействия тела с потоком среды

Ю. Д. Селюцкий

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

В задаче о нестационарном движении тела-пластины в потоке среды (воды, воздуха) проведено сравнение предложенной в [2] системы обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей нестационарное взаимодействие тела с потоком среды, с интегро-дифференциальным уравнением, используемым для описания этого взаимодействия школой С. М. Белоцерковского [1].

Как известно из теории колебаний, линейную динамическую систему можно привести к виду интегро-дифференциального уравнения. Показано, что исходную систему уравнений можно привести к виду интегро-дифференциального уравнения со структурой, весьма близкой к структуре уравнения, используемого в подходе Белоцерковского. Представление уравнений движения в интегро-дифференциальной форме удобно (после надлежащих преобразований) для исследования переходных процессов, а также для разделения времен.

Любопытно отметить, что исходная система дифференциальных уравнений эквивалентна двупараметрическому семейству интегро-дифференциальных уравнений, в котором роль параметров играют начальные условия по переменным, связанным с жидкостью.

Представление модели в виде системы дифференциальных уравнений более удобно для решения задачи идентификации параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 03-01-00190), программы «Университеты России» и гранта Президента РФ МК-263.2003.01.

[1] Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Локтев Б. Е., Томшин В. М. Линейные и квазилинейные задачи динамики жесткого аппарата с отклоняющимися рулями. — *Труды ВВИА им. Жуковского.* — 1971. — **1302**. — 110–146.

[2] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. К задаче о колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды. — В кн.: Избранные труды международной конференции по механике «III Поляховские чтения» — СПб.: СПб ун-т, 2003. — 220-225.

УДК 517.9

О приближении функций класса Соболева W_∞^1 функциями специального вида

Т. Ю. Семенова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть f — функция, определенная на отрезке $[0,1]$, принадлежит пространству W_∞^1 дифференцируемых почти всюду функций с нормой $\|f\|_{W_\infty^1} = \operatorname*{esssup}_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. Для определенности считаем $f(0)=0$.

Пусть $0 \leqslant d \leqslant 1$, отрезки $[x_k, x_k+d] \subset [0,1]$, где $k = 1, ..., N$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_N$. Обозначим $\mathcal{L}_N = \{\varphi \mid \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{[x_k, x_k+d]}\}$.

$e(f, \mathcal{L}_N) = \inf_{\varphi\in\mathcal{L}_N} \|f-\varphi\|_2$ — оценка приближения функции f множеством $\mathcal{L}_N$ по норме $L_2([0,1])$, $E_N(W_\infty^1) = \sup_{f\in W_\infty^1,\, \|f\|\leqslant 1} e(f, \mathcal{L}_N)$ — оценка приближения пространства функций W_∞^1 множеством $\mathcal{L}_N$.

Если $\overline{x} = (x_1, ..., x_N)$ — фиксированный набор левых концов отрезков, тогда $\mathcal{L}_N(\overline{x}) = \{\varphi \mid \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{[x_k, x_k+d]}\}$ — линейное пространство размерности $\leqslant N$. Исследование и оценка величины $D_N(W_\infty^1) = \inf_{\overline{x}} \sup_{f\in W_\infty^1,\, \|f\|\leqslant 1} e(f, \mathcal{L}_N(\overline{x}))$ дает возможность определить оптимальное расположение отрезков для приближения всего класса функций W_∞^1.

Теорема 1. *Верна формула*

$$D_N(W_\infty^1) = E_N(W_\infty^1) = e(f=x, \mathcal{L}_N) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{(1-Nd)^3+Nd^3/4}{3}}, & d \leqslant \frac{1}{N}; \\ \sqrt{\frac{(1-(N-2)d)^3+(N-2)d^3/4}{3} - \frac{d^3(2+d(-2N+5/2))}{(N+1)d-1}}, & \frac{1}{N} \leqslant d \leqslant \frac{1}{N-1}; \\ E_{N-1}(W_\infty^1), & d \geqslant \frac{1}{N-1}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Оптимальным расположением отрезков для класса* W^1_∞ *является следующее: если* $d \leqslant \frac{1}{N}$, *то* $x^*_k = 1 - (N-k+1)d$ *при* $k = 1, ...N$ *(рис. 1); если* $d > \frac{1}{N}$, *то* $x^*_1 = ... = x_{N-[\frac{1}{d}]} = 0$ *и* $x^*_k = 1 - (N-k+1)d$ *при* $k = N+1-[\frac{1}{d}], ..., N$ *(рис. 2).*

УДК 517.9

О скорости сходимости жадных алгоритмов

А. В. Сильниченко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Жадным алгоритмом называется метод приближения элемента гильбертова пространства с помощью n максимальных коэффициентов Фурье. В последнее время жадные алгоритмы широко применяются для обработки информации (signal processing). Свойства жадных алгоритмов исследовались многими авторами.

Один из главных вопросов — скорость их сходимости. Верхняя оценка скорости сходимости $n^{-\frac{1}{2}}$ была получена Р. А. ДеВором и В. Н. Темляковым в 1996 г. Оценка снизу многократно улучшалась: $n^{-\frac{1}{6}}$ (Р. А. ДеВор и В. Н. Темляков, 1996 г.), $n^{-\frac{11}{62}}$ (С. В. Конягин и В. Н. Темляков, 1999 г.). В данной работе мы используем новый подход к этой проблеме и улучшаем оценку на скорость сходимости.

УДК 517.547, 517.984

Функции класса Картрайт с конечным числом особенностей

К. К. Симонов

Донецкий Национальный Университет

Класс Картрайт $\mathcal{C}$ состоит из целых функций f конечного экспоненциального типа таких, что выполнено неравенство Картрайт $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+|f(x)|}{1+x^2}dx < \infty$. Известная теорема Крейна утверждает, что целая функция f принадлежит классу $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда f принадлежит классу Неванлинны в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ (см. [1]). В настоящей работе вводится класс Картрайт функций с конечным числом особенностей $x_1, \ldots, x_N$ на вещественной прямой. Мы называем голоморфную в $\mathbf{G} = \mathbb{C} \setminus \{x_j\}_{j=1}^N$ функцию f функцией класса $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ если $\overline{\lim}_{z\to\infty} \frac{\ln^+|f(z)|}{|z|} < \infty$, $\overline{\lim}_{z\to x_j}|z - x_j|\ln^+|f(z)| < \infty \quad (j = 1, \ldots, N)$ и выполнено неравенство Картрайт. Следующее утверждение обобщает теорему Крейна.

Теорема 1. *Функция f голоморфная в $\mathbf{G}$ принадлежит классу $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ тогда и только тогда, когда f принадлежит классам Неванлинны в $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$.*

В работе также изучаются обобщенные матрицы Неванлинны с конечным числом особенностей. Дано описание элементов таких матриц, которое получено как обобщение результата Крейна для целых матриц Неванлинны. (см. [2]). Полученные результаты применяются к теории представлений симметрических операторов (см. [3]). Теория целых операторов М. Г. Крейна распространяется на класс операторов с конечным числом особенностей и применяется к сильной проблеме моментов Гамбургера (см. [4]).

[1] Крейн М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1947. — **11**, №4. — 309–326.

[2] Крейн М. Г. О неопределенном случае краевой задачи Штурма – Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1952. — **16**, №5. — 293–324.

[3] Крейн М. Г. Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексами дефекта (m, m). *Укр. мат. журн.* — 1949. — №2. — 3–66.

[4] Jones W., Njåstad O. Orthogonal Laurent polynomials and strong moment theory: a survey *J. of comput. and appl. math.* — 1999. — **105**. — 51–91.

УДК 539.8

О построении асимптотических моделей двухколесного экипажа различного уровня точности

И. А. Смирнов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается задача [1] о движении двухколесного экипажа с переднезадним расположением колес. Переднее колесо считается рулевым, ось заднего - фиксирована в корпусе. Контактные силы взаимодействия экипажа с дорогой описываются моделью, учитывающей малые проскальзывания колес.

Качественный и численный анализ таких систем труден из-за сильного разнесения скоростей, составляющих движение экипажа. В результате нормализации [2] уравнения движения приводятся к сингулярно возмущенному, тихоновскому, виду с иерархией малых параметров [3], отражающих малость временных отношений и малость отношения масс колес и корпуса. При помощи методов фракционного анализа, теории сингулярных возмущений, безытерационного уточнения сингулярно возмущенных систем [2-5] в работе строится набор приближенных математических моделей экипажа, имеющих различные порядки и уровни точности по введенным малым параметрам. Для конечных значений малых параметров получено подтверждение проведенных асимптотических оценок при помощи численного счета.

[1] Новожилов И. В., Павлов И. С. Приближенная математическая модель колесного экипажа. *Известия РАН. Сер. МТТ.* — 1997. — № 2. — 196–204.

[2] Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: МГУ, 1995.

[3] Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. *Матем. сб.* — 1952. — **31(73)**, № 3. — 575–586.

[4] Васильева А. Б. Асимптотические формулы для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости. *ДАН.* — 1959. — **128**, № 6.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 04-01-00759.

[5] Влахова А. В. О безытерационных приближениях по малому параметру. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.* — 2003. — № 5. — 29–37.

УДК 681.32

Система уравнений неполной пластичности

Ю. И. Смирнова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В докладе рассматривается пространственная задача для идеально-пластического тела с условием пластичности Треска – Сен-Венана. В предположениях, что

- изменение объема подчиняется упругому закону;
- направления главных осей тензоров напряжений и деформаций совпадают;
- напряжение, не входящее в условие пластичности, связано с деформациями упругой связью;
- массовые силы отсутствуют

выписывается основная система уравнений для такого материала. Таким образом, его механическую модель можно представить следующим образом: тело сложено из упруго деформируемых призм, оси которых ориентированы вдоль одного из главных направлений, а сами призмы могут проскальзывать друг по другу по поверхностям скольжения, которые проходят через это главное направление и разделяют координатные углы между двумя другими главными направлениями пополам. Общая система уравнений сводится к трем уравнениям на компоненты вектора перемещений. В докладе проводится сравнение этой системы с аналогичной системой для теории упругости, анализ возможных разрывов функций, описывающих напряженно-деформированное состояние материала. Также приводится вид уравнений в новых инвариантах: максимальной нормальное напряжение, максимальное касательное напряжение и параметр Лодэ – Надаи.

УДК 681.32

Новые достаточные условия аппроксимации сверху систем дифференциальных включений с медленными и быстрыми переменными

Е. В. Соколовская

Самарский государственный университет

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных включений с медленными (x) и быстрыми (y) переменными:

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in \mu F(t,x,y,\mu),\ x(0)=x_0, \\ &\dot{y} \in G(t,x,y,\mu),\ y(0)=y_0; \end{aligned} \tag{1}$$

здесь $F : D \to K(\mathbb{R}^m),\ G : D \to K(\mathbb{R}^n);\ D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0,a];\ K(\mathbb{R}^p)$ — совокупность всех непустых компактов из евклидова пространства $\mathbb{R}^p$; $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$; $\mu \in [0,a]$ $(a>0)$ — малый параметр.

При аппроксимации сверху задачи (1) ей сопоставляется так называемая усредненная задача Коши:

$$\dot{u} \in \mu F_0(t,u),\ u(0)=x_0, \tag{2}$$

где $F_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to Kv(\mathbb{R}^m)$ ($Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^m$). Эта задача (2) называется [4] аппроксимирующей сверху задачу (1), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \mu_0 > 0$ такое, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_0]$ и для любого решения $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ задачи (1) найдется решение $u_\mu(t)$ задачи (2) такое, что выполняется неравенство $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon\ \ \forall\ t \in [0,\mu^{-1}]$ (здесь $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^m$).

В случае липшицевости отображений F, G и F_0 по совокупности фазовых переменных (x,y) и по u соответственно при некоторых условиях доказана [3], [2], в частности, возможность аппроксимации сверху задачи (1) задачей (2). В настоящей работе эти условия ослабляются. Именно, от отображений F, G и F_0 требуется, во-первых, интегральная ограниченность. Во-вторых, требуется выполнение следующих оценок при каждом t из $\mathbb{R}_+$ для модулей непрерывности $\omega_F(t,\delta)$,$\omega_G(t,\delta)$ отображений F, G при $\mu = 0$ по совокупности (x,y) и модуля непрерывности $\omega_{F_0}(t,\delta)$ отображения F_0 по u:

$$\omega_F(t,\delta) \leqslant \sigma_F(t)\eta_F(\delta),\ \omega_G(t,\delta) \leqslant \sigma_G(t)\eta_G(\delta),\ \omega_{F_0}(t,\delta) \leqslant \sigma_{F_0}(t)\eta_{F_0}(\delta),$$

где $\sigma_F(t),\ \sigma_G(t),\ \sigma_{F_0}(t),\ \eta_F(\delta),\ \eta_G(\delta),\ \eta_{F_0}(\delta)$ — функции, удовлетворяющие определенным условиям.

Вместо липшицевости F_0 по u требуется более слабое условие односторонней липшицевости (OSL) отображения F_0 [5]: существует локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall\ u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m,\ \forall\ t \in \mathbb{R}_+,\ \forall\ v \in F_0(t, u_1)\ \exists\ w \in F_0(t, u_2)$, для которого $< u_1 - u_2, v - w > \leqslant L(t)\|u_1 - u_2\|^2$ (здесь $< \cdot, \cdot >$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$). Заметим, что для однозначных функций условие OSL впервые появилось, по-видимому, в работе [1].

В этих предположениях при некоторых дополнительных условиях доказано, что задача (2) аппроксимирует сверху задачу (1).

[1] Красносельский М. А., Крейн С. Г. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *ДАН СССР.* — 1955. — **102**, № 1. — 13–16.

[2] Филатов О. П., Хапаев М. М. О взаимной ε — аппроксимации решений системы дифференциальных включений и усредненного включения. *Мат. заметки.* — 1990. — **47**, вып. 5. — 127–134.

[3] Филатов О. П., Хапаев М. М. Усреднение дифференциальных включений с “быстрыми” и “медленными” переменными. *Мат. заметки.* — 1990. — **47**, вып. 6. — 102–109.

[4] Филатов О. П., Хапаев М. М. Усреднение систем дифференциальных включений. — М.: МГУ, 1998.

[5] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions. *SIAM J.Control and Optim.* — 1998. — **36**, № 2. — 780–796.

УДК 517.5

К одной задаче Гельфонда

А. Н. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

А. О. Гельфонд в [1] поставил задачу получения оценки для определителей типа Вандермонда

$$W_n(z_0^{\alpha_0}, z_1^{\alpha_1}, \ldots, z_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) = \begin{vmatrix} z_0^{\alpha_0} & z_0^{\alpha_1} & \ldots & z_0^{\alpha_{n-1}} \\ z_1^{\alpha_0} & z_1^{\alpha_1} & \ldots & z_1^{\alpha_{n-1}} \\ . & . & \ldots & . \\ z_{n-1}^{\alpha_0} & z_{n-1}^{\alpha_1} & \ldots & z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \end{vmatrix},$$

которая не зависит от $0 \leqslant z_0 < z_1 < \ldots < z_{n-1} \leqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1}$. Такого типа утверждения оказались полезными при исследовании роста собственных значений интегральных операторов. В данной работе рассматривается задача об оценках аналогичных определителей, которые зависят только от α_i и не зависят от z_i, когда последние пробегают некоторый компакт комплексной плоскости.

Сформулируем основной результат

Теорема. *Если* $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{0, n-1}$, *а* z_i *различные комплексные числа из компакта* B, *то*

$$\left|W_n(z_0^{\alpha_0}, z_1^{\alpha_1}, \ldots, z_{n-1}^{\alpha_{n-1}})\right| < K^\lambda (d+\varepsilon)^{n(n-1)/2} \frac{V_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}{1!2! \cdots (n-1)!}$$

где ε — *сколь угодно малое положительное число и* $n \geqslant N_\varepsilon$, d — *трансфинитный диаметр компакта* B, $V_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ — *определитель Вандермонда,* $K = \max\limits_{z \in B} |z|$, $\lambda = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} - n(n-1)/2$.

Следствие 1. *Если* $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{0, n-1}$, *а* z_i *различные комплексные числа из круга* $|z| \leqslant R$, *то*

$$\left|W_n(z_0^{\alpha_0}, z_1^{\alpha_1}, \ldots, z_{n-1}^{\alpha_{n-1}})\right| < R^\lambda (R+\varepsilon)^{n(n-1)/2} \frac{V_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}{1!2! \cdots (n-1)!}$$

где ε — *сколь угодно малое положительное число и* $n \geqslant N_\varepsilon$.

Следствие 2. *Если* $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{0, n-1}$, *а* z_i *различные действительные числа из отрезка* $[a; b]$, *то*

$$\left|W_n(z_0^{\alpha_0}, z_1^{\alpha_1}, \ldots, z_{n-1}^{\alpha_{n-1}})\right| < \\ < (b-a)^\lambda ((b-a)/4+\varepsilon)^{n(n-1)/2} \frac{V_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}{1!2! \cdots (n-1)!},$$

где ε — *сколь угодно малое положительное число и* $n \geqslant N_\varepsilon$.

[1] Гельфонд А. О. Избранные труды. — М.: Наука, 1973. — 329–352.

УДК 513.6

О разрешении 3-мерных терминальных особенностей

Д. А. Степанов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Терминальные особенности естественным образом возникают в теории минимальных моделей. В размерности 3 они классифицированы Ридом, Мори, Колларом и Шеферд-Барроном (см. [6, 4, 3]). В соответствии с классификацией любая 3-мерная терминальная особенность аналитически изоморфна либо составной дювалевской точке (типы cA, cD и cE), либо ее фактору по некоторой конечной циклической группе (типы cA/r, $cAx/2$, $cAx/4$, $cD/2$, $cD/3$, $cE/2$). Однако разрешения таких особенностей, бирациональные и комбинаторные свойства исключительных дивизоров до сих пор не описаны. Мы изучаем разрешения 3-мерных терминальных особенностей типа cD.

Известно, что исключительные дивизоры разрешений 3-мерных терминальных особенностей являются бирационально-линейчатыми поверхностями, т. е. покрываются рациональными кривыми. Это следует из [5], 2.14. В работе [2] Ю. Г. Прохоров получил более сильный результат для особенностей типа cA/r. Он доказал, что для терминальной особенности (X, o) типа cA/r, $r \geqslant 1$, все дивизоры с центром в o и дискрепантностью $a \leqslant 1$ рациональны. Аналогичное утверждение для других типов теминальных особенностей неверно.

Мы получили описание нерациональных исключительных дивизоров с дискрепантностью 1 над горенштейновыми (индекс $r = 1$) терминальными особыми точками типа cD.

Особенность типа cD_4 аналитически изоморфна гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ с уравнением

$$x^2 + g(y, z, t) = 0\,, \tag{1}$$

где ряд g начинается с членов степени 3 и уравнение $g_3(y, z, t) = 0$ определяет приведенную кубику в $\mathbb{P}^2$. Особенность типа cD_{n+1}, $n \geqslant 4$, аналитически изоморфна гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ с уравнением

$$x^2 + y^2 z + g(y, z, t) = 0\,, \tag{2}$$

где ряд g начинается с членов степени 4 или больше. Можно считать выполненными следующие условия. Присвоим переменным такие веса: $w(x) = n/2$, $w(y) = (n-1)/2$, $w(z) = w(t) = 1$. Тогда

а) вес функции g равен $w(g) = n$;

б) если $n = 2k - 1$, $k > 2$, то многочлен $y^2 z + g_{w=2k-1}(y, z, t)$ определяет в $\mathbb{P}(k-1, 1, 1)$ приведенную кривую.

Теорема. *Пусть 3-мерная терминальная особенность* $(X, 0) \subset \mathbb{C}^4$ *типа* cD_{n+1}, $n \geqslant 3$, *задана уравнением (1) или (2), причем выполнены условия а) и б). Существует не более одного нерационального дивизора* E *с дискрепантностью* 1 *и центром в* 0. *Если такой дивизор существует, то в случае* $n = 2k-1$ *он реализуется как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весами* $(k, k-1, 1, 1)$, *а в случае* $n = 2k$ — *как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весами* $(k, k, 1, 1)$. *В обоих случаях* E *представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над гиперэллиптической кривой рода не более* $k - 1$.

[1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отборажений. — М.: Наука. 1982.

[2] Прохоров Ю. Г. Замечание о разрешении трехмерных терминальных особенностей. *Успехи мат. наук.* — 2002. — **57**, №4. — 187–188.

[3] Kollár J., Shepard-Barron N. Threefolds and deformations of surface singularities. *Inv. Math.* — 1988. — **91**. — 299–338.

[4] Mori S. On 3-dimensional terminal singularities. *Nagoya Math. J.* — 1985. — **98**. — 43–66.

[5] Reid M. Canonical 3-folds. In: Jornées de Géométrie Algébrique d'Angers (A. Beauville, editor). — Alpen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. — 273–310.

[6] Reid M. Minimal Models of Canonical 3-folds. In: Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Adv. Studies in Pure Math. Kinokuniya and North-Holland. — 1983. — **1**. — 131–180.

УДК 517.98

Разложения по малому параметру в p-адической бозонной модели с $O(N)$ симметрией

Р. Г. Степанов

Казанский Государственный Университет

Исследуется преобразование R_α ренормализационной группы (РГ) с параметром α в пространстве $O(N)$-инвариантных гамильтонианов, задающих N-компонентное случайное поле в p-адическом пространстве. В координатном представлении таким моделям соответствует иерархическая модель Дайсона [1, 2]. Негауссовский гамильтониан H^*, неподвижный относительно преобразования R_α строится как перенормированный проекционный гамильтониан, где в качестве перенормировки используется аналитическая или размерная перенормировка. Вычисляется старшее собственное число λ_1 дифференциала преобразования R_α в точке H^*, определяющее критический индекс $\nu = \left(\log_p \lambda_1\right)^{-1}$. Используются два варианта теории возмущений. Первый вариант - разложение по параметру $\varepsilon = \alpha - 3d/2$, где α - параметр РГ, d - размерность пространства. Второй вариант - разложение по малому параметру $\delta = 4 - d$ при $\alpha = 2 + d$. Ответы для для индекса ν имеют вид:

$$\nu^{-1} = d/2 + \varepsilon - 2\frac{N+2}{N+8}\varepsilon - 16\varepsilon^2 \ln p \frac{(N+2)(7N+20)}{(N+8)^3} A(d) + O(\varepsilon^3),$$

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8}\delta - 4\delta^2 \ln p \frac{(N+2)(7N+20)}{(N+8)^3} A(4) + O(\delta^3),$$

где $A(d) = \psi(d/2) + \psi(d/2)^2/\psi(d) + \psi(d)/2 - 9/4, \quad \psi(y) = (1 - p^{-y})^{-1}$.

Наиболее интересен случай, когда $d = 3, \alpha = 2 + d$. Это соответствует выбору p-адического аналога оператора Лапласа в качестве гауссовской части гамильтониана. При указанных условиях ответы для ν имеют одинаковую асимптотику при больших p. Это согласуется с гипотезой о том, что в иерархических моделях в размерности 3, при выборе $\alpha = 2 + d$ оба разложения описывают один и тот же негауссовский инвариантный гамильтониан.

[1] Bleher P. M. and Sinai Ya. G. Investigation of the critical point in models of the type of Dyson's hierarchical models. *Commun. Math. Phys.* — 1973. — **33**. — 23.

[2] Lerner E.Yu., Missarov M.D. p-adic Feynman and String Amplitudes. *Commun. Math. Phys.* — 1989. — **121**. — 35–48.

УДК 531.36

Об устойчивости равномерных вращений заполненного жидкостью тела, подвешенного на струне

Т. С. Сумин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В работе рассмотрена модель движения тяжелого динамически симметричного тела с эллипсоидальной осесимметричной полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Жидкость совершает однородное вихревое движение. Тело подвешено на жесткой нерастяжимой струне. Исследованы стационарные движения: равномерные вращения тела и жидкости в полости вокруг общей оси симметрии. Получены следующие результаты: если жидкость медленно вращается внутри полости,то вне зависимости от угловой скорости тела стационарные движения устойчивы; при быстром вращении жидкости в полости для устойчивости достаточно, чтобы сама полость была достаточно сжата вдоль оси симметрии; в случае, когда жидкость и тело вращаются как одно целое, получены достаточные условия устойчивости в виде неравенств на параметры задачи.

[1] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965, 439 с.

[2] Рубановский В. Н., Самсонов В. А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. — М.: Наука, 1988. — 181–199.

[3] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. — М.: Эдиториал УРСС, 1998. — 7–59.

[4] Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г. О стационарных движениях подвешенного на струне твердого тела при вертикальном расположении одной из его главных осей инерции. *Изв. АН СССР. Сер. МТТ.* — 1980. — №2. — 34–45.

[5] Румянцев В. В. К динамике твердого тела, подвешенного на струне. *Изв. АН СССР. Сер. МТТ.* — 1983. — №4. — 5–15.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (01-01-00141).

[6] Рубановский В. Н. Об устойчивости вертикального вращения твердого тела, подвешенного на струне. *Изв. АН СССР. Сер. МТТ.* — 1983. — № 4. — 5–15.

УДК 512.562

Эквивалентность категорий $BChu_\Sigma$ и SPS_Σ

А. Г. Сухонос

Дальневосточный государственный университет

В работе [1] доказано существование полного и строгого функтора из категории $BChu_\Sigma$ в категорию PS_Σ, которая определяется ниже, где $\Sigma = \{0,1\}$. Мы обобщаем данный результат на произвольное частичное упорядоченное множество Σ.

Напомним, что тройка $\mathcal{A} = (A, r, X)$, где $r : A \times X \longrightarrow \Sigma$ называется пространством Чу над алфавитом Σ (или просто пространством Чу). Отображение r задает отображение $\hat{r} : A \longrightarrow \Sigma^X$ и $\check{r} : X \longrightarrow \Sigma^A$. Если $\hat{r}$ (соответственно, $\check{r}$) является инъективным, то (A, r, X) называется отделимым (соответственно, экстенсиональным). Преобразованием Чу из пространства Чу $\mathcal{A} = (A, r, X)$ в пространство Чу $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ называется пара (f, g) функций, где $f : A \longrightarrow B$, $g : Y \longrightarrow X$ такие, что $s(f(a), y) = r(a, g(y))$ для любых $a \in A$, $y \in Y$. Категорию состоящую из отделимых и экстенсиональных пространств Чу и их преобразований будем обозначать $BChu_\Sigma$. Пространство Чу (X, r', A) называется дуальным к (A, r, X), если $r'(x, a) = r(a, x)$ для любых $a \in A$, $x \in X$, и обозначается $(A, r, X)^\perp$.

Пару (P, Σ^X), где $P \subseteq \Sigma^X$ и Σ^X — частично упорядоченное множество с порядком индуцированным порядком на Σ, назовем Σ-парой. Σ-пара называется отделимой, если для любых $p \in P$, $x', x'' \in X$ из равенства $p(x') = p(x'')$ следует, что $x' = x''$. Гомоморфизмом из Σ-пары (P, Σ^X) в Σ-пару (Q, Σ^Y) назовем отображение $f^\# : \Sigma^X \longrightarrow \Sigma^Y$ сохраняющее порядок, причем $f^\#(P) \subseteq Q$. Категорию Σ-пар и их гомоморфизмов будем обозначать PS_Σ. Отделимые Σ-пары и их гомоморфизмы образуют подкатегорию категории PS_Σ, которую будем обозначать SPS_Σ. Σ-пара $(Q, \Sigma^P) = (P, \Sigma^X)^\perp$, где $Q = \{q_x \in \Sigma^P | \ x \in X$ и для любого $p \in P$ имеет место $q_x(p) = p(x)\}$, называется дуальной к Σ-паре (P, Σ^X).

Теорема 1. *Функтор* $F_\Sigma : BChu_\Sigma \longrightarrow SPS_\Sigma$ *задаваемый равенствами* $F_\Sigma(A, r, X) = (\check{r}(A), \Sigma^X)$ *и* $F_\Sigma(f, g)(\varphi)(y) = \varphi(g(y))$, *где* $\varphi \in \Sigma^X$ *является эквивалентностью категорий.*

Теорема 2. *Дуальное пространство Чу из категории $BChu_\Sigma$ соответствует дуальной Σ-паре из категории SPS_Σ.*

[1] Gupta V. Chu Spaces: a model of conturrency // a dissertation submitted to the department of computer science and the committee on graduate degree of the doctor of philosophy. 1994.

УДК 512.562

Обобщённая теорема Римана

Р. А. Суюндыков

Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим множество предельных точек последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, как $[\{a_n\}]$, тогда назовем суммой ряда множество предельных точек $[\{S_n\}]$, где $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность n-частичных сумм ряда , и будем обозначать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = [\{S_n\}]$.

Теорема 1. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится. Тогда для любого замкнутого связанного множества $B \subset R$ существует перестановка $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* = B$. Верно и обратное утверждение,если B сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то B — замкнутое связанное множество.*

Теорема 1 является обобщением известной теоремы Римана.

Пусть $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая перестановка последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $b_k = a_{n_{k-1}+1}^* + ... + a*_{n_k}$, назовем ПРС преобразованием последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. (ПРС — перестановка и расстановка скобок).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ПРС преобразование последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем ПРС преобразованием ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 2. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится. Тогда для любого замкнутого множества $B \subset R$ существует $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ПРС преобразования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.*

Теорема 3. *Пусть x_1 и x_2 принадлежат множеству предельных точек $[\{a_n\}]$ такие, что $x_1 x_2 < 0$, x_1 и x_2 несоизмеримы. Тогда для любого замкнутого множества $B \subset R$ существует $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ПРС преобразования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.*

Рассмотрим теперь ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где множество предельных точек $[\{a_n\}]$ не обязательно состоит из нуля.(Что является необходимым признаком для сходимости ряда).

Для таких рядов имеют место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть x_1 и x_2 принадлежат множеству предельных точек $[\{a_n\}]$ такие, что $x_1 x_2 < 0$, x_1 и x_2 соизмеримы, но хотя бы одна из точек x_1 и x_2 удовлетворяет следующему условию: существует $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ подпоследовательность последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x_i$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n_k} - x_i| = \infty$. Тогда для любого замкнутого множества $B \subset R$ существует $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ПРС преобразования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.*

УДК 512.562

Задача Римана в пространстве C^2

И. Г. Табакова

Московский педагогический государственный университет

В данной работе рассматривается область D из класса (T), которая параметрически задаётся следующим образом:
$D = \{(z_1, z_2) : |z_1| < r_1(\tau), |z_2| < r_2(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$, а её граница $\partial D = \{(z_1, z_2) : |z_1| = r_1(\tau), |z_2| = r_2(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$, где

$$r_1(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau}, \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0, \\ \omega_0 \tau, \text{ при } \tau_0 \leqslant \tau \leqslant 1, \end{cases};$$

$$r_2(\tau) = \begin{cases} \sqrt{1-\tau}, \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0, \\ \dfrac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}, \text{ при } \tau_0 \leqslant \tau \leqslant 1, \end{cases};$$

$\omega_0 = \sqrt{\tau_0} - 2\tau_0 + 2$.

Для этой области мы записали интегралы типа Темлякова первого и второго рода, указали их свойства, такие как: голоморфность, непрерывность, поведение интеграла в бесконечно удалённых точках. Нашли их предельные значения. Далее, мы поставили и решили задачи линейного сопряжения, которые рассматриваются на окружности особенностей $B_{-1,1} = \{(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) : |z_1^{(0)}| = 0, |z_2^{(0)}| = \frac{\xi_0 \omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}\}$, для заданной определяющей области D.

1. Задача Римана частного вида (Задача о скачке).

В пространстве C^2 задана область D типа A. Требуется найти функцию $p(z_1, z_2)$ из класса (T), исчезающую на бесконечности и испытывающую при переходе через границу ∂D области D скачок $g(\xi_0)$, т. е. удовлетворяющую краевому условию:
$p^+(0, \frac{\xi_0 \omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}) - p^-(0, \frac{\xi_0 \omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}) = g(\xi_0)$.

2. Однородная задача Римана.

В пространстве C^2 задана область D типа A. Требуется найти функцию $p(z_1, z_2)$ из класса (T), исчезающую на двумерном многообразии бесконечно удалённых точек, удовлетворяющую в точках окружности особенностей $B_{-1,1}$ краевому условию:

$P^+(0, \frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}) = G(\xi_0)p^-(0, \frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau}})$, где $(0, \frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}) \in B_{-1,1}$;

$P^+(0, \frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}) = \lim\limits_{\substack{(z_1,z_2)\to(0,\frac{\xi_0}{d})\\(z_1,z_2)\in D}} p(z_1, z_2),$

$P^-(0, \frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau}}) = \lim\limits_{\substack{(z_1,z_2)\to(0,\frac{\xi_0}{d})\\(z_1,z_2)\in E_2}} p(z_1, z_2).$

Функция $G(\xi_0)$ задана на окружности особенностей $B_{-1,1}$ и удовлетворяет условию Гёльдера, причём $\varkappa = \operatorname{Ind} G(\xi_0) \geqslant 0$ ($G(\xi_0)$ не обращается в нуль на $B_{-1,1}$).

$0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $0 \leqslant |z_1| \leqslant r_1(1)$, $0 \leqslant |z_1| \leqslant r_2(1)$.

УДК 512.562

О росте исключаемых слов

А. Таламбуца

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть A — конечный алфавит. Множество всех слов над A, не содержащих W как подслово, называется *языком с исключенным словом* W. Количество различных слов длины n в этом множестве называется *функцией роста* этого языка и обозначается $\gamma_W(n)$.

В работе рассматривается вопрос, какие слова W среди слов одинаковой длины имеют максимальную, а какие — минимальную функцию $\gamma_W(n)$?

Доказывается, что первыми являются слова из одинаковых букв, а вторыми — гиперпростые слова. (Слово называется *гиперпростым*, если никакое его собственное начало не является концом.)

Мы покажем, что из этих результатов несложно получить как следствие следующий интересный факт.

Теорема. *Если слово U строго длиннее слова V, то $\gamma_U(n) \geqslant \gamma_V(n)$; если n больше длины V, то неравенство строгое.*

УДК 517.946

Построение пространств типа Баргмана – Фока отвечающих различным представлениям ККС

И. Д. Тверитинов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Как утверждает теорема Шейла, в бесконечно мерном случае существуют не унитарно эквивалентные представления ККС. Для каждого класса эквивалентности Гауссовскиз мер (с обратимым корреляционным оператором) известно соответствующее представление ККС операторами в пространстве Винера – Сигала – Фока.

В работе построены соответствующие представления в пространствах типа Баргмана – Фока.

Пусть H компексно гильбертово пространство, полученное путем комплексификации пространства Q. Для каждого обратимого оператора $\mathrm{B} : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}$ рассмотрим семейства операторов
$\{\hat{\mathrm{q}}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{vsf}}, \hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{vsf}}, \mathrm{a} \in \mathrm{Q}\}$, $\{\hat{\mathrm{q}}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{bf}}, \hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{bf}}, \mathrm{a} \in \mathrm{Q}\}$ действующих в пространствах

$L_2(Q, \mu_{\frac{B}{2}})$, $L_2(H, \mu_{\frac{B}{2}})$ (символ обозначает соответствующую Гауссовскую меру) соответственно так:

$$\hat{q}_a^{vsf} : f(\cdot) \mapsto [Q \ni x \mapsto < x, a > f(x)]$$
$$\hat{p}_a^{vsf} : f(\cdot) \mapsto [Q \ni x \mapsto -i\frac{df}{dx}(x)(a) + i < x, B^{-1}a > f(x)]$$
$$\hat{q}_a^{bf} : f(\cdot) \mapsto [H \ni z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial z}(z)(B(a)) + \frac{1}{\sqrt{2}} < z, a > f(z)]$$
$$\hat{f}_a^{bf} : f(\cdot) \mapsto [H \ni z \mapsto \frac{i}{\sqrt{2}} < z, B^{-1}a > f(z) - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial z}(z)(a)].$$

Теорема. *Унитарный оператор*

$$T : L_2(Q, \mu_{\frac{B}{2}}) \ni f(\cdot) \mapsto [H \ni z \mapsto \int\limits_Q f(\tfrac{x}{\sqrt{2}}) d\mu_{B,z}(x)] \in L_2(H, \mu_{\frac{B}{2}}),$$

переводит семейство $\{\hat{q}_a^{vsf}, \hat{p}_a^{vsf}, a \in Q\}$ *в семейство* $\{\hat{q}_a^{bf}, \hat{p}_a^{bf}, a \in Q\}$.

УДК 629.05

Применение акселерометров в системах ориентации мобильных объектов

А. Г. Топехин

Московский институт электронной техники

Многие технические задачи требуют определения углового положения объекта относительно горизонта. В случае статического объекта, установленного на платформе, ориентация которой относительно горизонта известна, решением является применение датчиков углового положения, измеряющих углы между объектом и платформой. В том случае, когда платформа отсутствует, либо установка датчиков угла невозможна, выходом является применение приборов, показывающих угловое положение объекта относительно вектора силы тяжести Земли. В качестве чувствительных элементов этих приборов могут применяться акселерометры. По величине проекции вектора силы тяжести на ось чувствительности акселерометра можно судить об угле наклона объекта относительно горизонта.

Но применение системы на базе акселерометров ограничено только статическими объектами. В случае мобильных объектов низкочастотные вибрации вызывают большие погрешности измерений вектора силы тяжести. Поэтому в качестве чувствительных элементов целесообразно применять датчики угловой скорости (ДУС), интегрируя показания которых можно получать непосредственно приращения улов ориентации. Но погрешности чувствительных элементов и методов интегрирования приводят к быстрому накоплению ошибок, поэтому необходимо применение корректирующих звеньев. В качестве чувствительных элементов этих звеньев можно применять акселерометры.

К системам, применяемым на мобильных объектах, предъявляются высокие требования по динамическим и массо-габаритным характеристикам. Поэтому для таких систем перспективным является применение появившихся в недавнем времени микроэлектромеханических акселерометров и ДУСов. Подобные устройства более известны под аббревиатурой MEMS. Они достаточно дешевы и обладают хорошей точностью.

В докладе излагается опыт разработки инерциальной системы ориентации на базе микроэлектромеханических акселерометров и ДУСов. Даны основные формулы, описаны методы калибровки чувствительных элементов.

УДК 531.383

Об использовании вибрационного гироскопа для коррекции вестибулярной функции

А.А.Трусов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В экстремальных условиях персональной навигации необходима коррекция вестибулярной функции. Одним из возможных способов такой коррекции является применение вестибулярного протеза. В качестве устройств, измеряющих угловое движение, могут использоваться микромеханические вибрационные гироскопы. В докладе представлена механическая модель идеального одноосного вибрационного гироскопа. Проведен анализ возможности измерения угловой скорости при помощи вибрационного гироскопа в режимах вынужденных и собственных колебаний. Показана принципиальная возможность точного измерения нестационарной угловой скорости. На основе анализа механической модели полукружного канала сделан вывод о возможности использования выходного сигнала вибрационного гироскопа в вестибулярном протезе. Приводятся оценки точности серийно производимого вибрационного микрогироскопа

ADXRS150 фирмы “Analog Device”, полученные путем сравнения показаний с лазерным гироскопом.

[1] Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. *МТТ.* — 1997. — №6 — 27–35.

[2] Садовничий В. А., Александров В. В., Александрова Т. Б., Альманза А., Астахова Т. Г., Вега Р., Куликовская Н. В., Сото Э., Шуленина Н. Э. Математическая модель механорецептора угловых ускорений. *Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Матем., Мех.* — 2002. — №6. — 46–54.

[3] Painter C. C., Shkel A. M. Structural and thermal modeling of a z-axis rate integrating gyroscope *J.Micromech/ Microeng.* — 2003. — **13**. — 229–237.

УДК 531.383

Неупрощаемые описания и колмогоровская сложность

М. А. Устинов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть некоторая программа p даёт на входе a результат b. Будем искать “упрощение” программы p, то есть программу p', для которой $p'(a) = b$, имеющую меньшую колмогоровскую сложность и простую относительно p (это означает, что колмогоровская сложность $K(p'|p)$ мала). Мы показываем, что для любых слов a и b (кроме некоторых вырожденных случаев) можно найти “неупрощаемую” программу p любой заданной сложности больше $K(a) + K(b)$.

Уточняя это утверждение, удобно говорить об “описаниях” вместо программ: p считается описанием b при известном a, если условная сложность $K(b|a, p)$ мала. Вырожденные случаи, в которых упрощение заведомо возможно, таковы: $K(a) \approx 0$ (тогда в качестве упрощённой программы годится b) и $K(b|a) \approx 0$ (в качестве упрощённой программы годится пустое слово).

Теорема. *Для любого положительного ε найдётся $\delta > 0$ с таким свойством: пусть a и b — слова, а n, k — достаточно большие натуральные числа, причём*

$$K(a) \leqslant n; \quad K(b) \leqslant n; \quad K(a) \geqslant \varepsilon n;$$

$$K(b|a) \geqslant \varepsilon n; \quad k > K(a) + K(b) + \varepsilon n.$$

Тогда существует “неупрощаемая” программа сложности примерно k для b при известном a, то есть такое слово p, что

$$|K(p) - k| \leqslant \varepsilon n; \quad K(b|p, a) \leqslant \varepsilon n,$$

и для всякого слова p' (потенциального “упрощения”) выполнено одно из следующих утверждений:

$$K(p') \geqslant K(p) - \varepsilon n; \quad K(p'|p) \geqslant \delta n; \quad K(b|a, p') \geqslant \delta n.$$

Доказательство теоремы проводится с помощью построения выигрышной стратегии в некоторой игре.

УДК 515.129.35

О задаче совпадения конечного числа отображений

О. Д. Фролкина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Для отображений $f_1, \ldots, f_n : X \to Y$ пусть $\mathrm{Coin}(f_1, \ldots, f_n) = \{x \in X | f_1(x) = \ldots = f_n(x)\}$ — множество совпадения. Нас будет интересовать значение величины

$$\mathrm{MC}(f_1, \ldots, f_n) = \min\{|\operatorname{Coin}(f_1', \ldots, f_n')| : f_1' \simeq f_1, \ldots, f_n' \simeq f_n\}$$

и способы ее вычисления. Случай $n = 2$ исследован во многих работах. Мы переносим соответствующий аппарат на случай произвольного конечного числа отображений. Отметим, что задача вычисления MC не сводится к последовательному решению аналогичных задач для пар отображений.

Вообще говоря, число MC бесконечно. Для многообразий X, Y его конечность можно обеспечить, потребовав выполнения неравенства

$$\dim X \leqslant (n-1) \dim Y.$$

Точки совпадения разбиваются на классы Нильсена: $x_0, x_1 \in \mathrm{Coin}(f_1, \ldots, f_n)$ эквивалентны по Нильсену, если существует такой путь $c : I \to X$, $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$, что $f_1 \circ c \simeq \ldots \simeq f_n \circ c$ rel 0,1. Менее наглядное описание: каждый класс есть подмножество вида $p \operatorname{Coin}(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$, где $\tilde{f}_k : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ — поднятие f_k на универсальные накрытия, $p : \tilde{X} \to X$. Классы Нильсена открыто-замкнуты в $\mathrm{Coin}(f_1, \ldots, f_n)$.

Если X, Y — компактные замкнутые ориентированные многообразия, размерности которых удовлетворяют равенству $\dim X = (n-1)\dim Y$, может быть введено понятие индекса для изолированного подмножества множества $\mathrm{Coin}(f_1,\ldots,f_n)$, в частности, для класса Нильсена. Индекс является гомотопическим инвариантом. Классы ненулевого индекса называются (алгебраически) существенными. Количество существенных классов называется (алгебраическим) числом Нильсена и обозначается $NC(f_1,\ldots,f_n)$. Неравенство

$$NC(f_1,\ldots,f_n) \leqslant \mathrm{MC}(f_1,\ldots,f_n)$$

показывает важность нахождения числа Нильсена для оценки MC.

В докладе *указан способ сведения задачи совпадения произвольного числа отображений к задачам прообраза одного отображения, пересечения или совпадения двух отображений, и для произвольного числа отображений даны аналоги некоторых теорем, известных для случая совпадения двух отображений.*

УДК 534:57:612.74

Математическое моделирование позных нарушений при hamstring-синдроме

А. И. Хакимов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В физиологии известны нарушения функций опорно-двигательного аппарата, причиной которых являются нарушения нервной системы. Эти нарушения вызывают повышенный тонус отдельных групп мышц и встречаются при детском церебральном параличе (ДЦП). Они приводят к изменению вертикальной позы больного в спокойном вертикальном состоянии. В докладе рассмотрена математическая модель одного из подобных нарушений - hamstring-синдрома. Проявлением этого синдрома является повышенный тонус задней группы двухсуставных мышц бедра (прежде всего полусухожильной и полуперепончатой) [1].

Для описания изменения позы человека в саггитальной плоскости использована упрощенная модель, использованная ранее в [2] для описания позы больного при rectus-синдроме. Поза определяется с учетом того, что нервная система вырабатывает командные

Работа выполнена при поддержке РФФИ 02-01-00774.

сигналы (нервные импульсы) мышцам с целью вертикализации положения туловища больного (центр масс расположен над стопой и туловище вертикально). Отыскивается такая поза больного, при которой сумма квадратов моментов односуставных мышц минимальна.

Одним из распространенных способов коррекции позы является хирургическое вмешательство, в ходе которого переносятся места крепления сухожилий пораженных мышц. Для описания изменений производимых при операции строится дополнительная математическая модель на основе [2], учитывающая изменения в кинематике.

[1] Журавлев А.М. и др. Хирургическая коррекция позы и ходьбы при детском церебральном параличе. — Ереван: Айастан, 1986.

[2] Кручинин П.А. Математическое моделирование позных нарушений больного при rectus-синдроме. In: First International Scientific Teleconference "New Technology in Medicine". — СПб: Россия, 2004.

УДК 531.36

Двухмассовая тросовая система на круговой орбите в магнитном поле

С. В. Хизгияев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Данная работа продолжает исследования В. В. Белецкого и Е. М. Левина [1] по тросовым системам. В их работах предполагается, что одно из тел имеет пренебрежимо малую массу по отношению ко второму телу. В настоящей работе рассматривается система, состоящая из двух материальных точек произвольной массы, соединенных токопроводящим, невесомым тросом. Составлены уравнения движения для случая, когда центр масс системы движется по кеплеровой орбите, наклоненной к экватору в гравитационном и электромагнитном полях. Трос в квазиравновесном состоянии имеет форму либо окружности, либо винтовой линии. Выписаны уравнения для радиуса кривизны окружности и винтовой линии. Для случая экваториальной круговой кеплеровой орбиты найдены положения равновесия и исследована их устойчивость. Доказано, что устойчивые равновесия возможны только в случае равных масс двух

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00398) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2000.2003.1).

тел. Исследована их устойчивость в случае, когда трос закручен в несколько витков.

[1] Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М.:Наука, 1990.

[2] Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. М.:Наука, 1972. — с. 297-301.

[3] Белецкий В. В., Хентов А. А. Магнитно-гравитационная стабилизация спутника. *Изв. АН СССР. Сер. МТТ.* — 1973. — № 4. — 22–32.

[4] Белецкий В. В., Новогребельский А. Б. Существование устойчивых относительно равновесий искусственного спутника в модели магнитного поля. *Астрономический журнал.* — 1973. — **50**, № 2. — 327–335.

[5] Хентов А. А. Пассивная стабилизация искусственных спутников по магнитному полю Земли. *Космические исследования.* — 1967. — **5**, № 4. — 541–553.

УДК 519.622

Симметричные коллокационные одношаговые методы со старшими производными и квадратичная экстраполяция

Е. Ю. Хрусталева, Г. Ю. Куликов, А. И. Меркулов

Ульяновский государственный университет

Запишем l-стадийный метод Рунге – Кутты со старшими производными, для решения системы ОДУ $x'(t) = g\big(t, x(t)\big)$, $\quad x(t_0) = x^0$, $\quad t \in [t_0, t_0 + T]$ с достаточно гладкой правой частью:

$$
\begin{aligned}
t_{ki} &= t_k + c_i \tau,\\
x_{ki} &= x_k + \tau \sum_{j=1}^{l} \sum_{r=0}^{p_j} \tau^r a_{ij}^{(r)} g^{(r)}(t_{kj}, x_{kj}), \quad i = 1, 2, \ldots, l, \qquad (1)\\
x_{k+1} &= x_k + \tau \sum_{j=1}^{l} \sum_{r=0}^{p_j} \tau^r b_j^{(r)} g^{(r)}(t_{kj}, x_{kj}), \quad k = 0, 1, \ldots, K-1,
\end{aligned}
$$

Используя теорию симметричных методов [2], можно получить пригодные для практического применения условия симметричности коэффициентов метода (1):

$$
\begin{gathered}
c_i = 1 - c_{l+1-i}, \quad p_j = p_{l+1-j}, \\
a_{ij}^{(r)} = (-1)^r \big(b_{l+1-j}^{(r)} - a_{l+1-i,l+1-j}^{(r)}\big), \\
b_j^{(r)} = (-1)^r b_{l+1-j}^{(r)}, \quad r = 0, 1, \ldots, p_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, l.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Асимптотическое разложение глобальной ошибки таких методов содержит только члены четных порядков относительно шага численного интегрирования τ (см. [2]) Применяя экстраполяционный процесс (см. [1]) к методам вида (1) с условиями (2), получаем квадратичную экстраполяцию: каждая строка экстраполяционной таблицы позволяет увеличить порядок метода на 2. При этом значительно сокращаются затраты машинного времени. Практические эксперименты подтверждают теоретические результаты.

[1] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.

[2] Kulikov G. Yu. Revision of the theory of symmetric one-step methods for ordinary differential equations. *Korean J. Comput. Appl. Math.* — 1998. — **5**, № 3. — 579–600.

УДК 517.9:532

Математические проблемы теории колебаний стратифицированной жидкости

Д. О. Цветков

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

Исследованы задачи о колебаниях гидродинамических систем, состоящих как из одной вязкой стратифицированной жидкости, частично заполняющей неподвижный или равномерно вращающийся сосуд, так и из системы двух несмешивающихся стратифицированных жидкостей, при наличии свободной поверхности. Изучены задачи о малых движениях исследуемых гидродинамических систем. Проведены построения, которые позволяют получить аналог известного разложения Вейля, приспособленный к исследованию указанных задач. Путем проектирования уравнений движения на соответствующие ортогональные подпространства и введения вспомогательных краевых задач и их операторов начально-краевые задачи, описывающие малые движения гидродинамических систем, проводятся к дифференциальным уравнением первого порядка в некоторых гильбертовых пространствах. Главные операторы дифференциальных уравнений оказываются аккретивными и незамкнутыми, что затрудняет применение известных теорем о разрешимости из общей теории дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Для исследования полученных задач Коши осуществляется процедура замыкания главных операторов и рассмотрения задачи Коши с замкнутыми операторами, называемые сопутствующими. Далее, на основе общих теорем, получены утверждения о сильной разрешимости сопутствующих задач Коши. Путем выбора начальных данных из областей определения незамкнутых операторов удается показать, что соответствующие решения задач лежат также в областях определения незамкнутых операторов. На этом пути доказаны теоремы о существовании и единственности сильных решений соответствующих начально-краевых задач (для вращающейся системы, в случае статической устойчивости по линейному приближению).

Исследована спектральная задача о нормальных колебаниях гидросистемы, содержащей вязкую стратифицированную жидкость, частично заполняющей неподвижный сосуд. Доказано свойство дискретности спектра с двумя предельными точками: в нуле и на бесконечности. Получены асимптотические формулы для двух ветвей собственных значений с этими предельными точками, объяснен физический смысл этих ветвей. Доказано существования почти J-ортонормированного базиса Рисса составленного из корневых элементов соответствующего оператора спектральной задачи. Выяснены условия существования J-ортонормированного базиса из собственных элементов соответствующего оператора. Исследована спектральная задача о нормальных колебаниях гидросистемы, содержащей вязкую стратифицированную жидкость, частично заполняющей равномерно вращающейся сосуд. Доказано, что при "включении" вращения спектр задачи "уходит" с вещественной оси, причем все собственные значения, кроме, быть может, конечного числа, попадают в область:

$$D_{\epsilon,\delta} = \{\, \lambda \in C \;:\; |\arg \lambda| < \epsilon, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \omega_0(1+\delta) \,\}.$$

Далее, свойство базисности Рисса заменяется на свойство полноты (при достаточно большой вязкости), а свойство дефектной базисности Рисса (при произвольной вязкости) — на свойство дефектной полноты.

Исследована спектральная задача о нормальных колебаниях частично диссипативной гидросистемы, содержащей две тяжелые несмешивающиеся стратифицированные жидкости. При этом нижняя по отношению к действию силы тяжести жидкость считается вязкой, верхняя — идеальной. Доказано, что весь спектр задачи лежит в правой замкнутой полуплоскости. Спектр лежащий вне отрезка $[-iN_{0,2}, iN_{0,2}]$ ($N_{0,2}$ — максимальное значение частоты плавучести для идеальной жидкости) состоит из собственных значений конечной кратности. Непрерывный спектр соответствующего операторного пучка совпадает с отрезком мнимой оси. Установлено, что точками сгущения спектра могут быть только точки отрезка и бесконечность. Существует три ветви собственных значений с предельными точками на бесконечности. Одна ветвь локализована у действительной положительной полуоси и две у мнимой. Получены асимптотические формулы для этих ветвей собственных значений.

УДК 517.956

Об асимптотике собственных значений оператора Лапласа с условием Дирихле на малом разрезе

М. И. Черданцев

Уфимский государственный авиационный технический университет

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — односвязная ограниченная область, содержащая начало координат, с границей $\Gamma \in C^\infty$, γ — поверхность диффеоморфная открытому кругу и содержащая начало координат. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x : x\varepsilon^{-1} \in \gamma\}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \gamma_\varepsilon$. В работе методом согласования асимптотических разложений строится асимптотика при $\varepsilon \to 0$ собственного значения краевой задачи:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon \text{ при } x \in \Omega_\varepsilon, \qquad \psi_\varepsilon = 0 \text{ при } x \in \Gamma_\varepsilon,$$

которую будем называть возмущенной. Предельной назовем задачу

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \text{ при } x \in \Omega, \qquad \psi_0 = 0 \text{ при } x \in \Gamma.$$

Основной результат работы представлен в следующем утверждении:

Теорема. *Пусть λ_0 — простое собственное значение предельной задачи, тогда существует единственное простое собственное значение λ_ε возмущенной задачи, сходящееся при $\varepsilon \to 0$ к λ_0, и его асимптотика имеет вид*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + o(\varepsilon),$$

$$\lambda_1 = -4\pi\psi_0(0)c(\gamma).$$

Здесь $c(\gamma) < 0$ — некоторая константа, зависящая от геометрии поверхности γ.

УДК 517.95

Некоэрцитивные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями

Е. А. Чиж

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n \geqslant 2$, с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$,

$$K = \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) |\ v(x) \geqslant \psi(x) \text{ почти всюду на } \Omega\},$$

где

$$\psi \in C_2(\overline{\Omega}),\ q > n,\ \psi(x) \leqslant 0\ \forall x \in \Gamma_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid d(x,\Gamma) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ — фиксировано, а $d(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ.

Рассматривается задача нахождения функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} (v-u)_{x_j} dx + \int\limits_{\Omega} (a_0(x) - \lambda_0) u(x)(v-u)(x) dx + \\ + \int\limits_{\Omega} g(x,u)(v-u)(x) dx \geqslant 0\ \ \forall\, v \in K, \quad (1)$$

где $Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + a_0(x)u(x)$ — равномерно эллиптический дифференциальный оператор, $a_{ij} \in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_0 \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $a_0(x) \geqslant 0$ на Ω, λ_0 — минимальное собственное значение оператора L с граничным условием $u|_\Gamma = 0$. Функция $g : D \to R$ ($D = \{(x,\xi) :\ x \in \Omega \text{ и } \xi \geqslant \psi(x)\}$) — суперпозиционно измерима [1]. Кроме того, предполагается, что для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ может иметь на $[\psi(x), +\infty)$ разрывы только первого рода и непрерывна при $\xi = \psi(x)$, $g(x,\xi) \in [g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]$ для любого $\xi \in [\psi(x), +\infty)$, где

$$g_-(x,\xi) = \lim_{s\to\xi}\inf g(x,s), \qquad g_+(x,\xi) = \lim_{s\to\xi}\sup g(x,s).$$

Основной результат работы — следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) *существует функция* $a \in L_q(\Omega)$ $(q > n)$ *такая, что для почти всех* $x \in \Omega$
$$|g(x,\xi)| \leqslant a(x) \; \forall \xi \geqslant \psi(x);$$
2) *существуют числа* $r_1 > 0$ *и* $r_2 \geqslant 0$*, такие что*
$$\int\limits_{\{x\in\Omega \mid d(x,\Gamma)<r_1\}} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \\ + \int\limits_{\{x\in\Omega \mid d(x,\Gamma)\geqslant r_1\}} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \geqslant 0,$$
где $\varphi(x)$ *— положительная в* Ω *собственная функция оператора* L *с граничным условием* $u|_\Gamma = 0$*, соответствующая* λ_0*;*
3) *существует не более чем счетное семейство поверхностей* $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x,\xi) \in D \mid \xi = \psi_i(x)\}$, $\psi_i \in W^2_{1,loc}(\Omega)$ *таких, что для почти всех* $x \in \Omega$ *неравенство* $g_+(x,\xi) \neq g_-(x,\xi)$ *влечет существование* $i \in I$*, для которого* $(x,\xi) \in S_i$ *и либо* $(L\psi_i(x) - \lambda_0\psi_i(x) + g_-(x,\psi_i(x)))(L\psi_i(x) - \lambda_0\psi_i(x) + g_+(x,\psi_i(x))) > 0$*, либо* $L\psi_i(x) - \lambda_0\psi_i(x) + g(x,\psi_i(x)) = 0$.

Тогда найдется функция $u \in W^2_q(\Omega)\bigcap K$*, удовлетворяющая (1).*

[1] Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983.

УДК 517.95

Оптимальное восстановление интегралов от функций многих переменных по их граничным значениям

С. С. Чудова

Рассматриваемая задача относится к кругу проблем теории оптимального восстановления. В этой теории ставятся задачи о нахождении оптимальных методов восстановления характеристик объектов по некоторой неполной и/или неточной информации о самих объектах. Как правило, эту информацию можно разделить на два типа — глобальную, заключающуюся в том, что исследуемый объект принадлежит к некоторому классу объектов и локальную – информацию о конкретном объекте.

Пусть на единичном шаре d-мерного пространства задана функция из соболевского класса, т. е. норма ее первой производной в среднеквадратической метрике не превосходит единицы. Известны ее значения на границе этого шара, т. е. задана некоторая функция, равная на границе шара исходной функции. Необходимо восстановить (по возможности, наилучшим образом) значение интеграла от функции по единичному шару, используя только эту информацию, а также найти погрешность оптимального восстановления.

Для нахождения погрешности оптимального восстановления и оптимального метода сначала решается ассоциированная задача. Эта задача является задачей выпуклого программирования, и применение принципа Лагранжа позволяет найти ее значение, которое оказывается равным погрешности оптимального восстановления, затем предъявляется оптимальный метод восстановления.

УДК 517.956.45, 517.977.56, 517.958

Об оптимизации дискретного Фурье-фильтра

В. А. Чушкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассмотрим ограниченные, выпуклые области $\Omega \subset R^2$ с кусочно гладкой границей и введем обозначения: $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$. Пусть $\mathcal{F}_\rho(A)$ — оператор Фурье-фильтрации, изменяющий ряд Фурье комплекснозначной функции $A(x,y)$ по ортонормированному в H базису $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ собственных функций задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}u \equiv u - D(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u)$ в области Ω с помощью дискретного фильтра-мультипликатора $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots) \in \ell_\infty$ по правилу

$$\mathcal{F}_\rho(A)(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \langle A, e_n \rangle_H e_n(x,y).$$

Обозначим $A_{fb}(u) = \mathcal{F}_\rho(A_{in} \exp\{iu\})$ и поставим задачу Коши:

$$\tau \partial_t u + \mathcal{L}u = K_1 |A_{in}|^2 + K_2 Re(A_{in}^* A_{fb}(u)) + K_3 |A_{fb}(u)|^2, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x,y),\ u|_\Sigma = 0. \qquad (2)$$

Здесь $(x,y,t) \in \Omega \times [0,T]$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0,T]$, $\partial\Omega$ — граница Ω, $\tau > 0$, $D > 0$. Такие задачи возникают при описании динамики фазовой модуляции $u(x,y,t)$ световой волны в оптических системах обратной связи с управляемым блоком Фурье-фильтрации.

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in H$, $A_{in} \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Тогда задача (1)-(2) при любом $T > 0$ для любого фильтра $\rho \in \ell_\infty$ имеет единственное решение $u \in L^2(0,T;V)$, $\partial_t u \in L^2(0,T;V^*)$.*

Фиксируем $\forall \rho^* \in \ell_\infty$, $u_1 \in H$ и поставим задачу оптимизации:

$$\mathcal{J}(\rho) = ||u(T;\rho^* + \rho) - u_1||_H^2 \to \inf_{B_R}, B_R = \{\rho \in \ell_2 : ||\rho||_{\ell_2} \leqslant R\}. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Пусть все собственные функции $e_n(x,y)$ равномерно по n ограничены в метрике $C(\overline{\Omega})$. Тогда $\forall \rho^* \in \ell_\infty$ и $\forall u_1 \in H$ множество оптимальных управлений задачи (3) непусто и слабо компактно. Функционал $\mathcal{J}(\rho)$ дифференцируем по Фреше на всем ℓ_2.*

Полученная формула градиента функционала $\mathcal{J}(\rho)$ используется при численном решении задачи оптимизации (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 01-01-00639) и AFOSR (грант CRDF RP0-1391-MO-03).

Аналогичные результаты получены для краевого условия Неймана, а также для условия периодичности в прямоугольнике.

УДК 519.68

О криптосистемах, использующих группы кос

М. В. Шеблаев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Введение. В данном докладе мы рассмотрим потенциально уязвимые места криптосистемы AAFG [2] и опишем некоторые классы ключей, применение которых снижает стойкость системы.

Основные понятия и определения.

Определение 1. Группа кос $B_n =< \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\} >$, множество определяющих соотношений имеет вид $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, |i-j| > 1$, $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

Определение 2. Задача поиска сопрягающего элемента: пусть заданы $x, y \in B_n$ такие, что $\exists\, a \in B_n : x = a^{-1}ya$. Требуется найти a.

На сегодняшний день не существует эффективного алгоритма решения этой задачи.

Криптографический протокол. Рассмотрим две подгруппы группы B_n, известные обеим сторонам: $S_A =< s_1, s_2, \ldots, s_k >$ и $S_B =< t_1, t_2, \ldots, t_l >$, где s_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и t_j, $1 \leqslant j \leqslant l$ — порождающие элементы, опубликованые в открытом доступе.

1) Абонент A выбирает слово $a \in S_A$, B выбирает слово $b \in S_B$;
2) Абонент A передает абоненту B слова $a^{-1}t_1a, a^{-1}t_2a, \ldots, a^{-1}t_la$, Абонент B передает абоненту A слова $b^{-1}s_1b, b^{-1}s_2b, \ldots, b^{-1}s_kb$;
3) Абонент A вычисляет $b^{-1}ab$, абонент B вычисляет $a^{-1}ba$;
4) Общие ключи: $K_A = K_B = a^{-1}b^{-1}ab = [a, b]$.

Результаты.

Утверждение 1. *Пусть $x, y \in B_n$, $X =< x >\subseteq B_n$ - циклическая подгруппа группы B_n, порожденная элементом x. Тогда задача проверки $y \overset{?}{\in} X$ может быть решена за время $O(\max(|x|, |y|)^2 n \log_2 n)$*

Рассмотрим гомоморфизм $F : B_n \to GL(Z[t], n)$, известный как представление Бурау [1].

Утверждение 2. *Пусть $KerF \cap S_A = e$ и $KerF \cap S_b = e$. Тогда секретный ключ может быть найден за полиномиальное время.*

[1] Мантуров В. О. Лекции по теории узлов и их инвариантов. — М.: УРСС, 2001.

[2] Anshel I., Anshel M., Fisher B., Goldfield D. New Key Agreement Protocol in Braid Group Cryptography, Lecture Notes in Computer Science, v.2020. — Berlin: Springer, 2001.

УДК 517.97

Оптимальное управление фильтрацией жидкости

Е. В. Шкляева

Пермский государственный университет

Рассматриваются некоторые задачи оптимального управления для систем, описывающих фильтрацию двухфазных жидкостей. Такие системы описываются краевыми задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих вырождающееся уравнение (на решениях системы происходит вырождения типа уравнения), и потому вопросы их оптимизации являются достаточно сложными.

К задачам оптимального управления сводится задача удержания состояния системы около заданного положения в течение некоторого времени. Рассматривается модельная задача управления фильтрацией двухфазной несжимаемой жидкости в неодносвязной области, граница которой проницаема. В некоторых местах расположены нагнетательные и эксплуатационные скважины. В области происходит процесс вытеснения одной фазы (нефти) другой (водой). Требуется, управляя расходами одной из фаз на нагнетательных скважинах, в течение некоторого времени удерживать систему в состоянии, при котором взаимное распределение фаз близко к заданному профилю при минимальной стоимости управления. Предполагается, что течение жидкостей подчиняется законам Дарси, жидкости являются несмешивающимися и несжимаемыми.

В работе предлагается сведение поставленной задачи к задаче оптимального управления системой с распределенными параметрами с граничным управлением и наблюдением. Рассматриваемая система является сингулярной, поскольку наблюдение неоднозначно зависит от управляющих параметров.

В работе доказано существование оптимального управления, получены необходимые условия оптимальности. Введением сопряженного состояния получена оптимизационная система, которая является необходимым условием оптимальности управления и используется для численного решения задачи.

УДК 510.53

О решениях функциональных уравнений в теориях Шостака

С. П. Шлепаков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Пусть задана сигнатура Ω, содержащая только функциональные символы. *Канонизатор* $\varkappa$ — это алгоритм приведения термов к нормальному виду, удовлетворяющий условиям:

1) $\varkappa x = x$,
2) $Var(\varkappa t) \subseteq Var(t)$,
3) $\sigma \sim_\varkappa \sigma\varkappa$,
4) $\varkappa t = f(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow \varkappa t_i = t_i$,
5) $f(\bar{t}) \sim_\varkappa f(\varkappa\bar{t})$.

Здесь x — переменная, $f \in \Omega$, t, t_i — термы, σ — произвольная подстановка, $a \sim_\varkappa b \Leftrightarrow \varkappa a = \varkappa b$.

Рассмотрим эквациональную теорию τ, заданную аксиомами $t = \varkappa t, t \in Tm$. Пусть также для теории τ существует *решатель* — алгоритм, распознающий разрешимость уравнений вида $a = b$, $a, b \in Tm$ в теории τ и преобразующий разрешимое уравнение в эквивалентную ему идемпотентную подстановку.

Дополним язык переменными $\{g_i\}$ по функциям фиксированной арности и рассмотрим задачу *второпорядковой унификации* — решения систем уравнений в расширенном языке. При этом допустимые значения переменных g_i задаются бесконечными подстановками σ, действуюшими на выражения (неизвестные) $g_i(\bar{t})$ согласованным образом: $\sigma g_i(\bar{t}) \sim_\varkappa \sigma g_i(\sigma\bar{t})$ (функциональная согласованность) и $\sigma g(\bar{t}) \sim_\varkappa \sigma g(\varkappa\bar{t})$ (согласованность с $\varkappa$). В некоторых случаях такие подстановки удается кодировать конечными объектами.

Свойство унифицируемости (совместности) системы алгоритмически разрешимо. Мы предлагаем описание структуры множества решений системы и эффективный способ вычисления характерных решений.

(Слабым) *наиболее общим унификатором* системы называется такое ее решение σ, что каждое решение системы θ представимо в виде $\theta \sim_\varkappa \lambda\sigma$, где λ — подходящая бесконечная подстановка. При этом накладывается некоторое техническое ограничение на "новые"переменные, которые разрешается использовать в подстановке θ.

Теорема. *Если система унифицируема, то она обладает и слабым наиболее общим унификатором, допускающим конечное представление. Существует алгоритм, который распознает унифицируемость системы и, в случае положительного ответа, строит конечное представление ее слабого наиболее общего унификатора.*

УДК 510.53

Элементарные бирациональные отображения трёхмерных торических расслоений Мори

К. А. Шрамов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Расслоение Мори — это проективное $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие X с терминальными особенностями, снабженное морфизмом $\phi : X \to S$, являющимся стягиванием экстремального луча, на многообразие S меньшей размерности. Одним из применений программы минимальных моделей является разложение бирациональных отображений между расслоениями Мори в последовательность элементарных (так называемых линков). В то время как описание всех линков в общем случае в данный момент не представляется возможным, возможно полное описание эквивариантных элементарных отображений трёхмерных торических расслоений Мори. Все они естественно разделяются на несколько классов, причём в случаях, когда количество таких отображений конечно, их можно явно перечислить, а в остальных случаях дать локальное описание.

В связи с разложением бирациональных отображений в последовательность элементарных представляют интерес множества канонических и лог-канонических порогов.

Определение. Пусть X — $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие с терминальными особенностями, $D = \Sigma d_i D_i$, $0 \leqslant D_i \leqslant 1$, — дивизор на X. *Каноническим* (соотв., *лог-каноническим*) *порогом пары* (X, D) называется число $c(X, D) = \inf\{t | (X, tD)$ канонична $\}$ (соотв., $lc(X, D) = \inf\{t | (X, tD)$ лог-канонична $\})$.

В то время как в торической ситуации теория лог-канонических порогов тривиальна, канонические пороги всё ещё мало изучены. В докладе будет упомянуто о результатах, связанных с гипотезой об отсутствии точек накопления снизу у множества канонических порогов для торических многообразий.