Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Об одном нелинейном неоднородном соболевском уравнении

Аристов Анатолий Игоревич

Соискатель

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

E-mail: ai_aristov@mail.ru

Работа посвящена изучению свойств решений задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u - u - |u|^q u\right) + b\Delta u - au + \mu(x)|u|^r u + (\lambda, \nabla)u^2 + (\theta, \nabla)u = f(x),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$$

Здесь $u \in R$ – функция от времени $t > 0$ и вектора пространственных переменных $x \in \Omega$, где Ω – ограниченное подмножество R^N, $N \in \{2;\ 3\}$ с границей $\partial\Omega \in C^{(2,\eta)}$, $\eta \in (0;1]$, $a, b \in R$, $q \in [1;4]$, $\lambda, \theta \in R^N$, $f \in L_2(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Кроме того, будем предполагать, что при $N = 2$ или $N = 3$ соответственно $(r,\ \mu) \in (1;\ \infty) \times L_4(\Omega)$ или $(r,\ \mu) \in (1;\ 2] \times L_{6/(2-r)}(\Omega)$.

Задача описывает нестационарные процессы в полупроводниках. В [1] была исследована аналогичная задача для уравнения $\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u - u - |u|^q u\right) + \Delta u + u(u+\alpha)(u-\beta) = 0$.

Определение. *Обобщенным решением изучаемой задачи будем называть такое* $u \in C^1[0;\ T;\ H_0^1(\Omega))$, *что*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u - u - |u|^q u\right) + b\Delta u - au + \mu(x)|u|^r u + (\lambda, \nabla)u^2 + (\theta, \nabla)u - f, w \right\rangle = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

$\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $\forall t \in [0;T)$.

Теорема 1. $\forall u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *существует такое* $T > 0$ *(возможно,* $T = \infty$*), что задача имеет единственное обобщенное решение, причем если* T *конечно, то* $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$ *при* $t \to T - 0$.

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений.

Теорема 2. *Для параметра* T *имеет место оценка* $T \geqslant T_1 > 0$, *где* T_1 *выражено через параметры задачи. (Не исключается случай* $T = \infty$*.)*

Теорема 3. *Если* $\mu \leqslant 0$ *почти всюду на* Ω, *то* $T = \infty$. *Если* $q \geqslant 2r$, *то* $T = \infty$.

Теорема 4. *Ограничимся рассмотрением случая* $N = 2$. *Пусть*

$$r - (r+2)\left(\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}\right) - r(|a| + |b|) \geqslant 4q + 5,$$

кроме того, величина $\int_\Omega \mu |u_0|^{r+2} dx$ *достаточно велика. Тогда для* T *имеет место оценка* $T \leqslant T_2$ *(для* T_2 *найдена формула).*

Доказательства теорем 2, 3 и 4 основаны на энергетических оценках.

Литература

1. А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.

2. М.О. Корпусов. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М., 2010.