Секция «Математика и механика»

О скорости сходимости в индивидуальной эргодической теореме

Подвигин Иван Викторович
Кандидат наук
Новосибирский государственный университет, Физический факультет, Новосибирск, Россия
E-mail: ivan_podvigin@ngs.ru

Пусть $\mathcal{G}$ — полугруппа, $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ — σ-алгебра подмножеств полугруппы $\mathcal{G}$ и ν — σ-конечная мера, определенная на $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$. Пусть, далее (Ω, μ) — пространство с вероятностной мерой μ, на котором действует полугруппа $\mathcal{G}$ сохраняющими меру μ преобразованиями $\tau_g : \Omega \to \Omega, g \in \mathcal{G}$, т.е. для всякого измеримого множества $E \subseteq \Omega$ множество $\tau_g^{-1}(E)$ также измеримо для всех $g \in \mathcal{G}$ и $\mu(\tau_g^{-1}(E)) = \mu(E)$. Полугрупповое свойство (в аддитивной записи) означает, что для всех $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ и $\omega \in \Omega$ справедливо равенство $\tau_{g_1}(\tau_{g_2}\omega) = \tau_{g_1+g_1}\omega$. Для всякой функции $f \in L_1(\Omega, \mu)$ и любого $G \in \mathfrak{B}(\mathcal{G})$ такого, что $0 < \nu(G) < \infty$, определим эргодические средние

$$A_G f(\omega) = \frac{1}{\nu(G)} \int_G f(\tau_g \omega) d\nu(g), \quad \omega \in \Omega.$$

Пусть $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^+$ — неограниченное множество индексов (временная шкала), нумерующих семейство подмножеств $G_t \in \mathfrak{B}(\mathcal{G}), t \in \mathbb{T}$; причем 1) G_t — возрастающее семейство, т.е. $G_t \subset G_s$ и $\nu(G_t) < \nu(G_s)$ при $t < s$, 2) $0 < \nu(G_t) < \infty$ и 3) $\lim\limits_{t\to\infty} \nu(G_t) = \infty$. Для любого $t \in \mathbb{R}^+$ положим $\mathbb{T}_t = \{s \in \mathbb{T},\ s \geq t\}$. Предположим, что μ-п.в. существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} A_{G_t} f$, который мы будем обозначать как f^*. Это утверждение называется индивидуальной эргодической теоремой. Скорость сходимости в индивидуальной эргодической теореме мы определяем (см. [1]) как скорость убывания для каждого $\varepsilon > 0$ при $t \to \infty$ величин

$$\mathrm{P}_t^\varepsilon(\mu, f) = \mu\{\sup_{s\in\mathbb{T}_t} |A_{G_s} f - f^*| \geq \varepsilon\},\ t \in \mathbb{T},$$

поскольку сходимость μ-п.в. эквивалентно равенству $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{P}_t^\varepsilon(\mu, f) = 0$ для каждого $\varepsilon > 0$. В докладе приводятся оценки скорости сходимости в индивидуальной эргодической теореме для $f \in L_\infty(\Omega, \mu)$ через оценки вероятностей больших уклонений

$$\mathrm{p}_t^\varepsilon(\mu, f) = \mu\{|A_{G_t} f - f^*| \geq \varepsilon\},\ t \in \mathbb{T},$$

обобщающие на случай произвольных полугрупп технику из [2]. Рассматриваются примеры динамических систем, для которых получены такие оценки.

Литература

1. Качуровский А.Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т.51, №4. С. 73-124.

2. Качуровский А.Г. Подвигин И.В. Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Мат. заметки. 2013. Т.94, №4. С.569-577.