Секция «Математика и механика»

Об особенностях заданного типа на кривых и поверхностях фиксированной квазистепени и мультистепени

Асташов Евгений Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ast-ea@yandex.ru

Существует общая задача описания алгебраических многообразий с особенностями заданного типа и о связи степени многообразий с параметрами этих особенностей (см., например, [2]).

Определение 1 *Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^n, a) \to (\mathbb{C}, 0)$ *— росток голоморфной функции,* $k \in \mathbb{N}$. *Говорят, что росток гиперповерхности* $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ *в точке* a *имеет особенность типа* $\mathcal{A}_k$, *если в окрестности этой точки в* $\mathbb{C}^n$ *существуют локальные координаты* $z_1, \ldots, z_n$, *центрированные в точке* a, *в которых функция* f *имеет вид* $f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{k+1} + z_2^2 + \ldots + z_n^2$.

В работах [1] и [3] изучаются особенности типа $\mathcal{A}_k$, которые встреаются на гиперповерхностях фиксированной степени d в $\mathbb{C}^n$.

В настоящей работе изучается вопрос о том, какие особенности типа $\mathcal{A}_k$ могут иметь алгебраические кривые (соответственно, поверхности) фиксированной степени, квазистепени или мультистепени в $\mathbb{C}^2$ (соответственно, в $\mathbb{C}^3$). Результаты настоящей работы частично является обобщением результатов работы [3]. Точные определения и формулировки результатов приведены ниже.

Определение 2 *Пусть* $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ *— набор натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Будем говорить, что моном* $\underline{x}^{\underline{k}} = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ *имеет* $\underline{\alpha}$*-квазистепень* d, *если выполнено равенство* $\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = d$. *При этом* $\underline{\alpha}$*-квазистепень нулевого монома по определению полагается равной* $+\infty$. *Квазистепень многочлена определяется как наибольшая из квазистепеней его (ненулевых) мономов.*

Обозначим через $k_n(\underline{\alpha}; d)$ наибольшее из таких $k \in \mathbb{N}$, для которых существует гиперповерхность, заданная многочленом $\underline{\alpha}$-квазистепени d в $\mathbb{C}^n$ с особенностью типа $\mathcal{A}_k$ в какой-либо точке.

Теорема 1 *Для любых взаимно простых* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k_2((\alpha, \beta); d)}{d^2} \geq \frac{112}{209} \cdot \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Для любых взаимно простых в совокупности $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство:*

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k_3((\alpha, \beta, \gamma); d)}{d^3} \geq \frac{56}{209} \cdot \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Определение 3 *Мультистепенью многочлена $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется набор чисел $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, где d_i — наибольшая степень, в которой переменная x_i входит в мономы этого многочлена.*

Обозначим через $K_n(d_1, \ldots, d_n)$ наибольшее из таких $k \in \mathbb{N}$, для которых существует гиперповерхность мультистепени $(d_1, \ldots, d_n)$ в $\mathbb{C}^n$ с особенностью типа $\mathcal{A}_k$ в какой-либо точке.

Теорема 2 *Имеют место неравенства*

$$\varliminf_{d_1, d_2 \to \infty} \frac{K_2(d_1, d_2)}{d_1 d_2} \geq \frac{7}{11}, \qquad \varliminf_{d_1, d_2, d_3 \to \infty} \frac{K_3(d_1, d_2, d_3)}{d_1 d_2 d_3} \geq \frac{7}{22}.$$

Литература

1. С. М. Гусейн-Заде, Н. Н. Нехорошев. Об особенностях типа A_k на плоских кривых фиксированной степени. Функциональный анализ и его прил., т. 34, вып. 3 (2000), 69-70.

2. G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin. Plane curves of minimal degree with prescribed singularities. Invent. Math. v.133, no. 3, 539-580 (1998).

3. E. Astashov. On algebraic hypersurfaces of fixed degree in $\mathbb{C}^n$ with prescribed singularities. International miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications" (16 June 2012). Proceedings. M.: MESI, 2013. 5-19.

Слова благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-13-01-00755.