Секция «Математика и механика»

Оценки мощности плоских схем, реализующих булевы операторы

Калачев Глеб Вячеславович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: gleb597@yandex.ru

Плоская схема — это схема из функциональных элементов, уложенная на плоскость так, чтобы каждому входу и выходу соответствовала некоторая сторона клетки, в которой находится элемент. Таким образом, в такой схеме могут использоваться любые функциональные элементы, у которых в сумме не более четырех контактов. Элементы, которые на всех выходах реализуют тождественные функции, назовем коммутационными, остальные — логическими. Оценки для площади таких схем получил Кравцов С.С. [1]. В этой работе исследуется средняя мощность, выделяемая схемой, когда на ее вход подается случайная последовательность, в которой все входные наборы имеют одинаковую вероятность.

Множество булевых операторов с n входами и n выходами будем обозначать $P_2(n, m)$. Рассмотрим плоскую схему K, реализующую булев оператор. Входы схемы K, а также выходы всех ее элементов назовем *узлами* схемы K. Оператор, реализуемый схемой K обозначим f_K. *Потенциалом* схемы K *на наборе* x назовем количество узлов схемы K, принимающих значение 1, когда на вход схемы подан набор x, будем обозначать эту величину $u_K(x)$.

Средним потенциалом схемы K с n входами назовем величину $U_D(K) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{x \in \{0,1\}^n} u_K(x)$.

оператор. *Средним потенциалом оператора* $f \in P_2(n, m)$ назовем величину $U(f) = \min\limits_{K : f_K = f} U(K)$.

Введем функцию Шеннона для среднего потенциала: $U(n, m) = \max\limits_{f \in P_2(n,m)} U(f)$.

Теорема 1 *Если* $\log_2 m = o(2^n)$, *то* $U(n, m) \asymp \frac{m 2^{n/2}}{\sqrt{\min(m,n)}}$ *при* $n \to \infty$.

Эта теорема дает порядок функции Шеннона, когда нет ограничений на расположение выходов схемы. Если же наложить определенные ограничения на расположение выходов, то можно доказать более высокую нижнюю оценку в случае $m > n$. Например, если потребовать, чтобы все выходы схемы были расположены рядом, то порядок функции Шеннона вырастает до $\frac{m\sqrt{m}2^{n/2}}{n}$.

Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. Проблемы Кибернетики. Вып.19. — М.:Наука, 1967.— С. 285—293.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.