Секция «Математика и механика»

Некоторые автомодельные решения комплекснозначного нелинейного дифференциального уравнения солитонного типа

Новикова Ольга Викторовна

Северо-Кавказский федеральный университет, Институт математики и естественных наук , Ставрополь, Россия
E-mail: oly-novikova@yandex.ru

Для получения автомодельных решений комплекснозначного уравнения

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \overline{p}^2) = 0 \tag{1}$$

обратимся к эквивалентной ему системе уравнений на две действительные функции [1]:

$$u_t + v_{xx} - 4v(u^2 - v^2) = 0, \qquad v_t + u_{xx} - 4u(u^2 - v^2) = 0. \tag{2}$$

ЛЕММА 1. *Система уравнений (2) с помощью замены* $u(x,t) = \big(\omega(x,t) + q(x,t)\big)/2$, $v(x,t) = \big(\omega(x,t) - q(x,t)/2$, *где* $q = (\omega_t + \omega_{xx})/4\omega^2$, $\omega = e^{f(x,t)}$ *сводится к уравнению*

$$F_t - F_{xx} + 2(f_x F)_x = 0, \tag{3}$$

где трехчлен $F = f_t + f_{xx} + f_x^2$ *допускает преобразование подобия с условиями:*

$$f = f(\xi), \qquad \xi = (x^{-2}t)^{1/(k+1)}. \tag{4}$$

ЛЕММА 2. *Уравнение в частных производных (3) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка*

$$\begin{gathered}-k(k+1)^2 g + (k+1)^2 g'\xi + 4(k+1)(k+7)g^2\xi^{k+2} + 24(k+1)gg'\xi^{k+3} - \\ -4(k+3)\big(k+3+(k+1)(3k+7)\big)g\xi^{2k+2} - 4(k+3)(11k+25)g'\xi^{2k+3} + \\ +48(k+3)(g^3 - g'')\xi^{2k+4} + 16(6g^2g' - g''')\xi^{2k+5} = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где новая функция и новая комбинированная переменная определяются по формулам (4), $f'(\xi) = g(\xi)$, $k \neq -1$ *– свободный целочисленный параметр.*

Рассмотрим один из случаев с отрицательным параметром $k \leq -2$.

ЛЕММА 3. *Уравнение (5) имеет решения в виде рядов: 1)* $g = \sum\limits_{n=-(k+3)/2}^{\infty} a_n\xi^n$ *для нечетных* $k \leq -3$, *где* $a_{-(k+3)/2}$, $a_{-(k+2)}$, $a_{-(3k+5)/2}$ *– свободные, а коэффициенты между ними и после до* $a_{-2(k+1)}$ *равны нулю; 2)* $g = \sum\limits_{n=-(k+2)}^{\infty} a_n\xi^n$ *для четных* $k \leq -2$, *где* $a_{-(k+2)}$ *– свободный, а коэффициенты после него до* $a_{-2(k+1)}$ *равны нулю. Все последующие коэффициенты для любого* $k \leq -2$ *определяются по рекуррентной формуле* ($m \geq 0$):

$$a_{m-2k-2} = \frac{1}{m\big(4m(m-3k) + 11k^2 - 2k - 1\big) - k(3k^2 - 2k - 1)}\left[\frac{(k+1)^2}{4}(m-k)a_m + \right.$$

$$+12\sum_{i=0}^{m-2k-4} a_i \sum_{n=0}^{m-2k-4-i}(k+2n+3)a_n a_{m-2k-4-i-n} + (k+1)\sum_{n=0}^{m-k-2}(k+6n+7)a_n a_{m-k-2-n}\Bigg].$$

ТЕОРЕМА. *Нелинейное уравнение (1) имеет решение в виде $p(x,t) = u(x,t)+iv(x,t)$. Все функции, образующие решение и автомодельные переменные определяются согласно леммам 1, 2, 3.*

Литература

1. Новикова О.В. Исследование комплекснозначного нелинейного уравнения в частных производных // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта, Вып. 4. Физико-математические науки. 2012. С. 160 — 166.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Редькиной Татьяне Валентиновне за проявленное внимание и полезные советы в научном исследовании.