Секция «Математика и механика»

Задача о распространении волн в среде с памятью. Дискретный и непрерывный случаи.

Царицанский Анатолий Николаевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: tolyan777x@gmail.com

Рассматривается один из вариантов волнового уравнения для среды с памятью [1]

$$u_{tt} = hu_{xx} + \alpha u_{txx} + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^t \exp\{-\lambda_i(t-\tau)\} u_{xx}(\tau, x) d\tau, \quad n \geq 1 \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами c_i и показателями λ_i. Введение функции $v^{\{i\}}(t,x) = \left(h + \frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\int_0^t \exp\{-\lambda_i(t-\tau)\} u_{xx}(\tau,x)d\tau$ сводит уравнение (1) к различным системам в случае $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$.
При $\alpha = 0$ уравнение (1) приводится к следующей системе

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{ss} + \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i v^{\{i\}}, \\ u_{ss} = v_t^{\{i\}} + \lambda_i v^{\{i\}}, \quad i \in \{1, n\} \end{cases} \tag{2}$$

с характеристикам $s + t = const,\ s - t = const,\ s = const(n -$ кратные). В случае $\alpha \neq 0$ уравнение (1) при аналогичной замене сводится к системе

$$\begin{cases} u_s = p, \\ u_t - \dfrac{\gamma}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_t^{\{i\}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v^{\{i\}} + \sum\limits_{i=1}^{n} q^{\{i\}}, \\ q_t^{\{i\}} = \dfrac{\delta_i}{n} v^{\{i\}}, \quad i \in \{1, n\}, \\ p_s = n v_t^{\{i\}} + n\lambda_i v^{\{i\}}, \quad i \in \{1, n\}, \end{cases} \tag{3}$$

которая имеет характеристики $s = const(2n -$ кратные) и двойные $t = const$.

Метод распространяющихся волн позволяет представить решение системы дифференциальных уравнений явным образом через общее решение системы первого порядка, в которой каждое уравнение "отвечает" за перенос вдоль соответствующей характеристики [2,3]. Оказывается, что различие в количестве и типе характеристик систем (2) и (3) приводит нас при применении этого метода к совершенно различным результатам.
Теорема 1. *Общее решение системы* (2) *имеет вид*

$$\begin{cases} u(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s), \\ v^{\{i\}}(t,s) = -\lambda_i f^-(t,s) - \lambda_i f^+(t,s) + \lambda_i f^{\{i\}}(t,s) - {f^-}_s(t,s) + {f^+}_s(t,s), \quad i = \overline{1,n}, \text{ где} \end{cases}$$

$$\begin{cases} {f^-}_t(t,s) + {f^-}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2} f^+(t,s) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i f^{\{i\}}(t,s), \\ {f^+}_t(t,s) - {f^+}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2} f^+(t,s) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i f^{\{i\}}(t,s), \\ {f^{\{i\}}}_t(t,s) = (\lambda_i + \delta)\, f^-(t,s) + (\lambda_i + \delta)\, f^+(t,s) - \lambda_i f^{\{i\}}(t,s) - \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j f^{\{j\}}(t,s), \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 2. *Общее решение системы* (3) *имеет вид*

$$\begin{cases} u(t,s) = n\gamma f^1(t,s), \\ p(t,s) = n f^2(t,s), \\ v^{\{i\}}(t,s) = n f^1(t,s) + n g^i(t,s), \quad i = \overline{1,n} \\ q^{\{i\}}(t,s) = r^i(t,s), \quad i = \overline{1,n}, \text{ где} \end{cases}$$

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\gamma} f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j - \dfrac{1}{\gamma}\right) f^1(t,s) + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\lambda_j - \dfrac{1}{\gamma}\right) g^j(t,s) - \dfrac{1}{n\gamma}\sum\limits_{j=1}^{n} r^j(t,s), \\ {g^i}_t(t,s) = \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j - \dfrac{1}{\gamma} - \lambda_i\right) f^1(t,s) + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\lambda_j - \dfrac{1}{\gamma}\right) g^j(t,s) - \dfrac{1}{n\gamma}\sum\limits_{j=1}^{n} r^j(t,s) - \lambda_i g^i(t,s), \\ {r^i}_t(t,s) = \delta_i f^1(t,s) + \delta_i g^i(t,s), \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что система (5), в отличие от системы (4), помимо волн, содержит также и "параболическую" составляющую – дифференциальная часть первого и второго уравнений эквивалентна уравнению теплопроводности, так что "метод распространяющихся волн"дал нам на самом деле результат, явно выходящий за пределы теории чисто гиперболических уравнений и систем.

Литература

1. Гавриков А.А., Шамаев А.С. Некоторые вопросы акустики эмульсий // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 2010. вып. 28. С. 114–146.

2. Боровских А.В. Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 2004. вып. 24. С. 3-43.

3. Боровских А.В., Царицанский А.Н. Формула распространяющихся волн для среды с памятью // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 901-902.

Слова благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 12-01-00155).