Секция «Математика и механика»

О регуляризации показателя Перрона ограниченных линейных систем

Гаргянц Александр Георгиевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: gaaaric@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty),$$

каждую из которых отождествим с ее непрерывной ограниченной функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ множество всех решений системы A, а через $\mathcal{S}_*(A)$ —множество ее ненулевых решений, и положим $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}(A)$, и $\mathcal{S}_* = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$.

Определение 1 [1, 2]. Под *показателем Перрона* $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ будем понимать функцию

$$\pi(x) = \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|, \quad x \neq 0, \qquad \pi(0) = -\infty.$$

Показателем Перрона системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем сужение π_A этой функции на пространство $\mathcal{S}(A)$.

Определение 2 [4]. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{M}^n$. Тогда для всякого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ назовем

$$\pi_{\bar{i}}(A) = \inf_{L \in \mathcal{G}_i} \sup_{x(0) \in L \setminus 0} \pi_A(x) \qquad \text{и} \qquad \pi_{\underline{i}}(A) = \sup_{L \in \mathcal{G}_{n-i+1}} \inf_{x(0) \in L \setminus 0} \pi_A(x)$$

верхним и нижним соответственно i-ыми *регуляризованными по Миллионщикову* показателями Перрона системы A, где $\mathcal{G}_i$ — множество линейных i-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

В определении 2 представлены два естественных способа выделения среди полного перроновского спектра системы (который может быть континуальным и крайне сложно устроенным подмножеством в $\mathbb{R}$ [1, 5]) значений, связанных с поведением показателя Перрона на i-мерных подпространствах и подмногообразиях в $\mathbb{R}^n$.

В случае показателей Ляпунова аналогичные два способа регуляризации совпадают друг с другом и дают в точности все с учетом кратностей [3, с. 61–62] значения ляпуновского спектра системы. В докладе [4] утверждается, что для всяких $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{M}^n$ верно

$$\pi_{\bar{i}}(A) = \pi_{\underline{i}}(A) \text{ для } i = 1, n, \quad \text{и} \quad \pi_{\bar{i}}(A) \geqslant \pi_{\underline{i}}(A) \text{ для } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

причем в случае диагонализуемых ляпуновскими преобразованиями [2, с. 138] систем все нестрогие неравенства обращаются в равенства. Вопрос о совпадении некрайних верхних и нижних регуляризованных показателей Перрона для любых ограниченных систем был поставлен в докладе [4]. В настоящем сообщении на него дается отрицательный ответ.

Теорема 1. *Для всякого $n \geqslant 3$ и всякого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ найдется бесконечно дифференцируемая ограниченная система $A \in \mathcal{M}^n$, такая что для нее $\pi_{\bar{i}}(A) > \pi_{\underline{i}}(A)$.*

Результат теоремы 1 можно частично объяснить сложным строением множеств уровня показателя Перрона ограниченных систем. Из определения 1 вытекает, что множества уровня показателя Перрона системы из $\mathcal{M}^n$, вообще говоря, есть множества класса $F_{\sigma\delta}$. Следующая теорема утверждает, что на некоторых системах реализуется в точности этот класс.

Теорема 2. *Для всякого $n \geqslant 2$ найдется бесконечно дифференцируемая ограниченная система $A \in \mathcal{M}^n$, такая что непустые множества уровня ее показателя Перрона есть множества класса $F_{\sigma\delta}$, но не являются множествами классов F_σ или G_δ.*

Литература

1. Изобов Н. А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. №4. С. 469–477.

2. Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006.

3. Былов Б. Ф, Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.:Наука, 1966.

4. Сергеев И. Н. // Международная конференция, посвященная 103-летию со дня рождения И.Г.Петровского: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 199–200.

5. Барабанов Е. А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №11. С. 1843–1853.