Секция «Математика и механика»

Краевая задача А.А. Дезина для уравнения параболо-гиперболического типа

Киржинов Ромазан Анатольевич

Студент

КБГУ - Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Математический факультет, Нальчик, Россия

E-mail: kirzhinov.r@mail.ru

В прямоугольной области $\Omega = \{z : 0 < x < r;\ -r < y < \beta\}$, $(0 < \beta,\ 0 < r)$, $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ с вершинами в точках $A_0 = (0, \beta)$, $B_0 = (r, \beta)$, $C = (r, -r)$, $D = (0, -r)$ рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^{1+H(-y)} u}{\partial y^{1+H(-y)}} = f(z), \tag{1}$$

где $f(z) = \begin{cases} f^+(z) \in C\left(\bar{\Omega}^+\right), \\ f^-(z) \in C\left(\bar{\Omega}^-\right) \end{cases}$ — заданная функция, $H(y)$ — функция Хэвисайда, $u = u(x, y)$ — неизвестная функция с условиями периодичности по x:

$$u(iy) = u(r + iy), \quad u_x(iy) = u_x(r + iy), \quad -r \le y \le \beta; \tag{2}$$

условиями линейного сопряжения:

$$\lim_{y\to+0} u(z) = \lim_{y\to-0} u(z), \quad \lim_{y\to+0} u_y(z) = \lim_{y\to-0} u_y(z), \quad 0 < x < r; \tag{3}$$

и нелокальным краевым условием

$$u_y(x - ir) = \lambda u(x), \quad 0 < x < r. \tag{4}$$

Следуя принятым в [2, с. 144] обозначениям, положим: $\sigma_{x0} = \{z : 0 \le x \le r,\ y = 0\}$, $\sigma_{ry} = \{z : x = r, -r \le y \le \beta\}$, $\sigma_{x-r} = \{z : 0 \le x \le r,\ y = -r\}$, $\sigma_{0y} = \{z : x = 0, -r \le y \le \beta\}$. Характеристики $AC : x + y = 0$ и $BD : x - y = r$ разбивают область Ω^- на четыре треугольные области: $\Omega_1 = ABC_0$, $\Omega_2 = BCC_0$, $\Omega_3 = CDC_0$, $\Omega_4 = ADC_0$, где $A = (0, 0)$, $B = (r, 0)$, $C = (r, -r)$, $C_0 = (r/2, -r/2)$, $D = (0, -r)$. Обозначим класс $D(L) = C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega^+ \cup \sigma_{x0} \cup \Omega_1) \cap C^1(\Omega_2 \cup \sigma_{ry} \cap \{\operatorname{Im} z \le 0\}) \cap C^1(\Omega_3 \cup \sigma_{x-r}) \cap C^1(\Omega_4 \cup \sigma_{0y} \cap \{\operatorname{Im} z \le 0\})$.

В Ω^+ уравнение (1) имеет вид

$$u_{xx} - u_y = f^+(x, y), \tag{5}$$

а Ω^- – область, где уравнение (1) совпадает с одномерным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} = f^-(x, y),$$

далее везде полагается, что $u(x) \equiv \tau(x)$, $u_y(x) \equiv \nu(x)$. Функция $\tau(x)$ должна удовлетворять условиям Фурье

$$\tau(0) = \tau(r), \quad \tau'(0) = \tau'(r), \tag{6}$$

которые являются регулярными краевыми условиями [1, с.15].

Аналогом задачи А.А. Дезина [2, с. 174-175] в случае уравнения (1) является следующая

Задача D**.** *Найти регулярное всюду в области* Ω*, за исключением, быть может,* $\{z : y = 0,\, 0 < x < r; x + y = 0,\, x - y = r, 0 < x < r\}$*, решение* $u(z) = u(x, y)$ *уравнения (1) из класса* $D(L)$*, удовлетворяющее условиям (2)–(4).*

Фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на отрезок AB из области Ω^- имеет вид:

$$\nu(x) = \lambda\tau(x) - F(x), \quad 0 < x < r,$$

где $F(x)$ однозначно определяется правой частью уравнения (1).

Решение $u(z)$ задачи D в области Ω^+ ищется как решение следующей нелокальной краевой задачи для уравнения (5).

Задача D^+**.** *Найти регулярное в области* Ω^+ *решение* $u(z)$ *уравнения (5), которое непрерывно в замкнутой области* $\bar{\Omega}^+$*, имеет производную* u_x*, непрерывную вплоть до* $\sigma_{0y} \cup \sigma_{ry}$*, производную* u_y*, непрерывную вплоть до* σ_{x0}*, и удовлетворяет краевым условиям*

$$u(iy) = u(r + iy), \quad u_x(iy) = u_x(r + iy), \quad 0 < y < \beta, \tag{7}$$

$$u_y(x) = \lambda u(x) - F(x), \quad 0 < x < r. \tag{8}$$

В работе доказаны существование и единственность задачи D при $\lambda > 0$.

Литература

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

2. Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: КБНЦ РАН, 2011.