Секция «Математика и механика»

Аддитивные монотонные отображения операторов в гильбертовом пространстве, заданные связанным идемпотентом

Ефимов Михаил Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: efimov.mikhail@gmail.com

Пусть $\mathbb{F}$ — поле вещественных или комплексных чисел, H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$, $B(H)$ — совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве H.

Оператор $P \in B(H)$ будем называть идемпотентом, если $P^2 = P$, $\mathrm{I}_1(H) = \{P \in B(H) \mid P^2 = P\}$ — множество всех идемпотентов.

Определение 1. Будем говорить, что оператор $A \in B(H)$ обладает связанным идемпотентом, если существует такой оператор $P \in \mathrm{I}_1(H)$, что $\overline{\mathrm{Im}A} = \mathrm{Im}P$, $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}P$. Множество операторов, обладающих связанными идемпотентами, будем обозначать через $I_s(H)$, а указанный идемпотент P для оператора $A \in I_s(H)$ через $\pi(A)$.

Определение 2. Пусть $A, B \in B(H)$. Положим $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если и только если $A = B$, или $A \in I_s(H)$ и $\pi(A)A = \pi(A)B$, $A\pi(A) = B\pi(A)$.

Нетрудно видеть, что если P, Q — идемпотенты, то $P \overset{\sharp}{\leqslant} Q$ тогда и только тогда, когда $P = PQ = QP$, то есть $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок совпадает на идемпотентах со стандартным порядком.

Приведем формулировку известной теоремы Овчинникова (см. [1]) о монотонных отображениях множества идемпотентов в себя.

Теорема 1. Пусть биективное отображение $\phi\colon \mathrm{I}_1(H) \to \mathrm{I}_1(H)$ строго монотонно относительно порядка на идемпотентах. Тогда существует $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что $\phi(P) = SPS^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$ или $\phi(P) = SP^*S^{-1}$ для всех $P \in \mathrm{I}_1(H)$.

Целью данной работы является характеризация аддитивных биективных отображений, строго монотонных относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Аналогичный результат для минус-порядка был получен в работе [2]. Полученный характеризационный результат состоит в следующем:

Теорема 2. Пусть $T\colon B(H) \to B(H)$ — аддитивное биективное отображение, T строго монотонно относительно $\overset{\sharp}{<}$-порядка. Тогда существуют $\in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $S\colon H \to H$ — линейный или полулинейный обратимый ограниченный оператор такой, что $T(A) = \alpha SAS^{-1}$ для всех $A \in B(H)$ или $T(A) = \alpha SA^*S^{-1}$ для всех $A \in B(H)$.

В приведенной теореме условия биективности и аддитивности являются существенными, построены примеры, это демонстрирующие.

Литература

1. Ovchinnikov P. G. Automorphisms of the poset of skew projections // J. of Functional Analysis. — 1993. — Vol. 115. — P. 184—189.

2. P. Semrl. Automorphisms of B(H) with respect to minus partial order // J. Math. Anal. Appl. 2010. No. 369. P. 205–213.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 12-01-00140 и МД-962.2014.1.