Секция «Математика и механика»

О значениях перманентов квадратных (0,1)-матриц

Таранин Константин Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: coloconstar@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, M_n — кольцо $n \times n$ матриц над этим полем, S_n — группа перестановок на множестве из n элементов.

Определение. *Перманентом матрицы $A \in M_n$ называется число*

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Комментарий. В докладе, как и далее здесь, речь пойдёт только о матрицах порядка n, состоящих исключительно из нулей и единиц; для них перманент просто совпадает с количеством ненулевых слагаемых в соответствующем выражении.

Нетрудно заметить, что наибольшее возможное значение перманента для такой матрицы есть $n!$, и, таким образом, все возможные значения этой функции находятся между 0 и $n!$. В [1] было доказано утверждение о том, что все целые числа от 0 до 2^{n-1} (включительно) могут быть представлены как перманенты некоторых $n \times n$ (0,1)-матриц. А вот при приближении к $n!$ значения перманента располагаются всё менее плотно. В частности, одним из результатов работы докладчика является

Утверждение 1 *При $n > 2$ в полуинтервале $(\frac{(n+1)!}{ne}, n!]$ не может быть более чем*

$$\frac{e-2}{2}((n-1)! + (n-3)!) + \left[\frac{n}{2}\right] + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}\right)$$

значений перманента.

Следующие два результата, полученные докладчиком, в данном случае являются вспомогательными, но, тем не менее, представляют и самостоятельный интерес.

Утверждение 2 *Наибольший нечётный перманент равен ближайшему к $\frac{(n+1)!}{ne}$ целому числу.*

Утверждение 3 *При $n > 1$ наибольший перманент, не делящийся на 3, равен ближайшему к $\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)$ целому числу.*

Литература

1. R. A. Brualdi, M. Newman. Some theorems on permanent // Journal of Research of the National Bureau of Standards—B. Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 69B, No. 3, July–September 1965.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А.Э.Гутерману за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 12-01-00140 и МД-962.2014.1.