

Секция «Математика и механика»

Структура графа ортогональности кольца квадратных матриц над полем.

Бахадлы Бахад Рафик-Оглы

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: bahad1@mail.ru

Определение 1 Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Два различных элемента $P \in R$ и $Q \in R$ называются ортогональными, если $PQ = QP = 0$.

С каждым некоммутативным кольцом R можно связать граф ортогональности $O(R)$ с множеством вершин $R \setminus 0$, в котором две вершины соединены ребром, если соответствующие им элементы кольца ортогональны. Если в качестве R взять $M_n(F)$, то получится $O(M_n(F))$ — граф ортогональности кольца $n \times n$ матриц над полем F .

Ключевым инструментом, позволяющим изучить структуру этого графа, является тот факт, что каждая его вершина является вырожденной матрицей.

В работе получены следующие основные результаты.

Лемма 1 Граф ортогональности $O(M_n(F))$ при $n = 2$ несвязен.

Лемма 2 Пусть $n \geq 3$. Тогда для каждой вырожденной матрицы $A \in M_n(F) \setminus 0$ существует матрица $R \in M_n(F)$ ранга один с расстоянием $d(A, R) \leq 1$ в графе ортогональности $O(M_n(F))$.

Лемма 3 Расстояние между любыми двумя матрицами в графе ортогональности $O(M_n(F))$ не больше 4-х.

Следующая лемма аналогична [1, Lemma 2].

Лемма 4 Пусть $n \geq 3$. Тогда $d(J, J^t) = 4$ в графе $O(M_n(F))$, где J — жорданова клетка.

В заключение сформулируем обобщающую структурную теорему.

Теорема 1 Граф ортогональности $O(M_n(F))$ при $n \geq 3$ связан. Диаметр графа $O(M_n(F))$ равен четырём. Обхват графа $O(M_n(F))$ равен трём.

Литература

1. S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, On the diameters of commuting graphs, Linear Algebra Appl. 418 (2006), 161–176.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 12-01-00140, МД-962.2014.1.