Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Локализация спектра финитного возмущения одной краевой задачи в полосе

Нугаева Ирина Гамировна

Аспирант

Башкирский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия

E-mail: nuga-irina@yandex.ru

Рассмотрим оператор $L = L_0 + V$ с областью определения

$$D = \left\{ u(x,y) \in L^2(\Pi), \quad u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \right\},$$

где $\Pi = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, 0 \le y \le \pi\}$, $L_0 u = -\Delta u + x^2 u$ задачи Дирихле и $-\Delta = -\frac{\partial_2}{\partial x^2} - \frac{\partial_2}{\partial y^2}$ в пространстве $L^2(\Pi)$, V – оператор умножения на ограниченную измеримую финитную, вещественную функцию.

Пусть $P_i^{(2)}$ – ортонормированный проектор на собственное подпространство одномерного гармонического осциллятора, соответствующее собственным значениям $2i+1$, $i = 0, 1, 2...$, то есть $P_i^{(2)}\varphi = (\varphi, \varphi_i)\varphi_i$, где $\varphi_i(x) = (2^i i! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_2}{2}} H_i(x)$. А $P_l^{(1)}$ – ортонормированный проектор на собственное подпространство одномерного оператора Лапласа задачи Дирихле, сооствествующие собственным значениям l^2, $l = 1, 2...$, то есть $P_l^{(1)} f = (f, f_l) f_l$, где $f_l(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sinly$, $y \in [0, \pi]$. См [1],[3]. Тогда для собственных значений λ_{mk} оператора L_0 и соответствующих им проекторов P_{mk} справедливо следующее утверждение:

Лемма 1.Собственные значения оператора L_0 $\lambda_n = \lambda_{mk} = n$, $n = 2, 4, 5, 6...$, а их кратность $\nu_n = \begin{cases} [\frac{\sqrt{n}}{2}], & \text{если} \quad \lambda_n \in \left((2[\frac{\sqrt{n}}{2}])^2; (2[\frac{\sqrt{n}}{2}]+1)^2\right) \\ [\frac{\sqrt{n}}{2}] + \frac{(-1)^n+1}{2}, & \text{если} \quad \lambda_n \in \left((2[\frac{\sqrt{n}}{2}]+1)^2; (2[\frac{\sqrt{n}}{2}]+2)^2\right) \end{cases}$

причем $P_n = P_{mk} = \sum\limits_{s=1}^{\nu_n} P_s^{(1)} \otimes P^{(2)}_{(\frac{n}{2} - \frac{s^2+1}{2})}$.

На основании методики работы [1] устанавливаем справедливость следующих утверждений о локализации спектра оператора L:

Лемма 2. При $n >> 1$ справедлива асимптотическая оценка $\|P_n V\| = O(\frac{1}{\sqrt[4]{n}})$.

Лемма 3. Пусть $n >> 1$, тогда для собственных значений z оператора L, лежащих в окрестности точки λ_n верно

$$|z - \lambda_n| \le \frac{const}{\sqrt{n}}.$$