Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Об индексах дефекта неполуограниченного оператора Штурма-Лиувилля с колеблющимся потенциалом

Яковлева Галина Сергеевна

Аспирант

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия

E-mail: yakovleva_gs@mail.ru

Хорошо известно [1], что индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0, порожденного в $L^2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = -y'' - q(x)y,$$

где
1) $q(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$,
2) $q'(x) = o(q^{\alpha}(x))$, $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ при $x \to +\infty$
равны (2.2) или (1.1) в зависимости от сходимости или расходимости интеграла

$$\int^{\infty} q^{-\frac{1}{2}}(x)dx.$$

Условие (2) является весьма жестким. Оно означает, что функция $q(x)$ должна иметь правильный рост на бесконечности и не может быть осциллирующей. В работах [2] и [3] показано, что если $q(x) = x^{\alpha}(1 + \sin x^{\beta})$, то при $\beta > \frac{\alpha}{2} + 1$ индексы дефекта оператора L_0 равны (2.2). Мы рассматриваем случай $q(x) = x^{\alpha}(1 + \sin^n x^{\beta})$, где n - произвольное натуральное число, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $n = 2k - 1$, *то индексы дефекта оператора* L_0 *равны* (2.2) *при* $\beta > \frac{\alpha}{2} + 2$, $\alpha > 2$. *При этом для фундаментальной системы решений уравнения* $ly = \lambda y$ *справедливы асимптотические формулы:*

$$y_{1,2}(x,\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x^{\alpha} - \lambda}} \exp\{\pm i \int_0^x \sqrt{t^{\alpha} - \lambda} dt\}$$

при $x \to +\infty$.

Теорема 2. *Если* $n = 2k$, *то при* $\beta > \frac{\alpha}{2} + 2$, $\alpha > 2$ *оператор* L_0 *имеет индексы дефекта* (2.2), *причем для фундаментальной системы решений уравнения* $ly = \lambda y$ *при* $x \to +\infty$ *справедливы асимптотические формулы:*

$$y_{1,2}(x,\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x^{\alpha} - \lambda}} \exp\{\pm i \int_0^x \sqrt{(1 + b_k)t^{\alpha} - \lambda} dt\},$$

где $b_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k}}$.

Замечание. Полученные асимптотические формулы являются новыми. В случае теоремы 2 для различных k получаются различные асимптотики, но при $k \to \infty$ $b_k \to 0$ и получаются формулы, близкие к формулам теоремы 1.

Источники и литература

1) Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2) Eastham M.S.P. The asymptotic solution of linear differential systems. Application of the Levinson Theorem. Oxford, 1989.
3) Valeev N.F., Sultanaev Ya.T. On the deficiency indices of a singular Sturm-Liouville operator with a rapidly oscillating perturbation // Doklady Mathematics. 2000.No.2(62).P. 271-273.