Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Поверхностные меры порождаемые дифференцируемыми мерами.

Малофеев Илья Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: ilmalofeev@yandex.ru

Пусть μ — ограниченная неотрицательная радоновская мера на вполне регулярном топологическом пространстве X, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$. Мы будем предполагать, что мера μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов. Это условие всегда выполнено, если X — суслинское или метризуемое, а также если μ — гауссовская мера. Для данной измеримой функции $F\colon X \to \mathbb{R}$ или измеримого отображения $F\colon X \to \mathbb{R}^d$ можно рассмотреть образ меры $\mu \circ F^{-1}$, задаваемый формулой

$$\mu \circ F^{-1}(B) := \mu(F^{-1}(B))$$

на борелевской σ-алгебре в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^d$ соответственно.

Предлагаемая конструкция поверхностной меры σ^y на множестве уровня $F^{-1}(y)$ следующая: вводится некоторая весовая функция θ_F и полагается

$$\int f(x)\sigma^y(dx) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{\{y<F<y+r\}} f(x)\theta_F(x)\mu(dx)$$

для подходящего класса функций f (скажем, ограниченных липшицевых). В отличие от условных мер такая конструкция требует определенных ограничений на меры и функции, о которых идет речь.

Поверхностные меры, ассоциированные с векторными полями дифференцируемости. Мера μ, упомянутая выше, фиксирована всюду далее. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых функций. Предполагается, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

(F1) $\mathcal{F}$ — линейное пространство, разделяющее радоновские меры на X и $\varphi(f) \in \mathcal{F}$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и всех функций $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Векторным полем v будем называть отображение $f \mapsto \partial_v f$ из $\mathcal{F}$ в $L^1(\mu)$, для которого $\partial_v(\psi\circ f) = \psi'(f)\partial_v f$ μ-п.в. для всех $f \in \mathcal{F}$ и всех функций $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Предположим, что $\mathcal{F}$ наделено некоторой нормой $\|f\|_{\mathcal{F}}$, причем существует $p > 1$ такое, что

$$\|f\|_{L^p(\mu)} + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{F}}, \quad f \in \mathcal{F}.$$

С помощью этой нормы обычным образом вводится $C_{\mathcal{F}}$-емкость на X (см. [1]).

Далее считаем, что мера μ дифференцируема вдоль v по Фомину, т.е. имеется такая функция $\beta_v \in L^1(\mu)$, что

$$\int_X \partial_v f(x)\mu(dx) = -\int_X f(x)\beta_v(x)\mu(dx), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Определение 1. Будем говорить, что функция $\Psi \in L^1(\mu)$ входит в $\mathfrak{D}_v$, если $\psi \in L^1(d_v\mu)$ и существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, сходящаяся к Ψ в $L^1(\mu)$ и $L^1(d_v\mu)$, такая, что функции $\partial_v f_n$ сходятся в $L^1(\mu)$ к некоторой функции w и функции $f_n\partial_v g$ равномерно интегрируемы для каждой $g \in \mathcal{F}$. Тогда положим $\partial_v\Psi := w$.

Будем считать, что $F\colon X \to \mathbb{R}$ — $\mathcal{B}$-измеримая функция, причем

(F2) $\psi(F) \in \mathfrak{D}_v$ для каждой функции $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ и найдется $\mathcal{B}$-измеримая функция $\partial_v F$ такая, что $\partial_v(\psi\circ F) = \psi'(F)\partial_v F$ п.в. для каждой $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Более того, $\partial_v F \geqslant 0, \quad \partial_v F \in L^1(\mu)$. Положим $\nu := (\partial_v F)\cdot\mu$

Определение 2. Для фиксированного $y \in \mathbb{R}$ предположим, что Φ_f дифференцируема в y для каждой функции $f \in \mathcal{F}$. Мера σ^y на X определяется следующим образом:

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \varrho_f(y).$$

Теорема 1. *Пусть μ — дифференцируема по Фомину вдоль векторного поля v. Предположим, что условия (F1) и (F2) выполнены и что мера $\mu\circ F^{-1}$ не имеет атомов. Будем считать также, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *X — полное метрическое пространство и $\mathcal{F}$ содержит все липшицевы функции;*
2) *мера μ имеет компактный носитель;*
3) *существует неотрицательная функция $W \in \mathfrak{D}_v$ такая, что $W\beta_v, W\partial_v F \in L^1(\mu)$ и множества $\{W \leqslant R\}$ — компакты для всех $R \geqslant 0$.*

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$ существует радоновская поверхностная мера σ^y. Кроме того, если мера μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов, то для $\nu\circ F^{-1}$-п.в. y мера σ^y сосредоточена на $F^{-1}(y)$ и имеет место равенство $\sigma^y = \varrho_1(y)\nu$

Поверхностные меры на поверхностях высокой коразмерности. Данная конструкция работает также в случае поверхностей высокой коразмерности, но требует большей регулярности от отображения

$$F = (F_1, \dots, F_d)\colon X \to \mathbb{R}^d,$$

на множествах уровня которого мы хотим определить поверхностные меры. Пусть Δ_F — определитель Маллявэна, $M^{i,j}$ — минор матрицы Маллявэна с элементами $\partial_{v_i}F_j$ и $W_r = \{|F| < r\}$. Положим $\nu = \Delta_F \cdot \mu$.

Определение 3. Пусть для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ мера $(f\cdot\nu)\circ F^{-1}$ имеет непрерывную плотность ϱ_f. Поверхностная мера σ^y на $F^{-1}(y)$ определяется формулой

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \varrho_f(y), \quad f \in \mathcal{F}$$

Теорема 2. *Если $s > 2d$, то для любой функции $f \in \mathcal{F}$ мера $(f\cdot\nu)\circ F^{-1}$ абсолютно непрерывна на U_r и имеет ограниченную непрерывную плотность ϱ_f такую, что*

$$\sup_{y\in U_r} |\varrho_f(y)| \leq C\Big(\|f\|_{L^{2d}(\nu)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_{v_j} f\|_{L^{2d}(\nu)}\Big),$$

где C — число, которое зависит только от $d, s, r_0, \|u_i\|_{L^s(\nu)}$.

Работа поддержана проектом РНФ 14-11-00196.

Источники и литература

1) V. I. Bogachev: Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность В. И. Богачёву за постановку задачи и научное руководство и постановку задачи.