Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Подгруппы нечетного порядка в группе Кремоны вещественной проективной плоскости

Ясинский Егор Андреевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: yasinskyegor@gmail.com

Группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(k)$ называется группа бирациональных автоморфизмов n-мерного проективного пространства над полем k. Классификация конечных подгрупп в группе Кремоны является классической проблемой, восходящей к работам Е. Бертини, который в 1877 году описал классы сопряженности подгрупп порядка 2 в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Несколько лет спустя С. Кантором и А. Виманом было получено некоторое описание конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, которое, однако, не может сегодня претендовать ни на строгость, ни на полноту.

Современный подход к изучению конечных подгрупп в группе Кремоны начался в работах Ю. И. Манина и В. А. Исковских, установивших тесную взаимосвязь между изучением классов сопряженности конечных подгрупп в группе Кремоны и классификацией G-минимальных рациональных многообразий (X, G) и G-эквивариантных бирациональных отображений между ними. Позже эта техника была применена Л. Бэйлем и А. Бовилем в их работе об инволюциях, а затем их классификация была обобщена де Фернексом на изучение групп простого порядка. Наконец, практически полное описание всех конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ было получено И. В. Долгачевым и В. А. Исковских в 2006 году. В гораздо меньшей степени изучены конечные подгруппы в группе Кремоны над произвольными, необязательно алгебраически замкнутыми, полями. Некоторые результаты о существовании бирациональных автоморфизмов простого порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(k)$ для любого совершенного поля k были получены Долгачевым и Исковских. Похожие вопросы, в том числе оценки типа Минковкого для порядков конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(k)$, рассматривались в работах Ж.-П. Серра. Порождающие для различных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ были недавно изучены Дж. Бланком и Ф. Мангольтом.

Настоящий доклад посвящен подгруппам нечетного порядка в группе Кремоны вещественной проективной плоскости $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$. Автором была получена их полная классификация. Основной результат состоит в доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 1 Любая подгруппа нечетного порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ сопряжена подгруппе в группе автоморфизмов некоторой поверхности дель Пеццо X. Более точно, имеет место один из следующих случаев:

1) $\mathrm{rkPic}(X)^G = 1$;

2) $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ и G является произведением не более чем двух циклических групп.

Теорема 2 дает более подробное описание групп G, встречающихся в случае 1 из предыдущей теоремы.

Теорема 2 Пусть X — гладкая проективная вещественная поверхность дель Пеццо с $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, а $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ — подгруппа нечетного порядка, такая что $\mathrm{rkPic}(X)^G = 1$. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- $K_X^2 = 9$, $X \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, G — циклическая подгруппа в $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$;

- $K_X^2 = 8$, $G \cong \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, причем действие G сопряжено линейному;
- $K_X^2 = 6$, $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ и G сопряжена некоторой подгруппе в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$;
- $K_X^2 = 5$, $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, причем действие G сопряжено линейному.