Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О теоремах сравнения и потраекторной устойчивости одномерных стохастических дифференциальных уравнений

Асылгареев Артур Салаватович
Студент (специалист)
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия
E-mail: asylgareevarthur@gmail.com

Рассматриваются два скалярных уравнения с симметричными интегралами (см [2]):

$$d\xi_t^{(k)} = \sigma^{(k)}(t, \xi_t^{(k)}) * dX(t) + b^{(k)}(t, \xi_t^{(k)})dt, \;\; \xi_t^{(k)}|_{t=t_0} = \xi_0^{(k)}, \; k = 1, 2, \tag{1}$$

где $X(t), \; t \in R^+$, - непрерывная нигде не дифференцируемая функция.

Такие уравнения являются детерминированными аналогами стохастических дифференциальных уравнений с интегралом Стратоновича, поэтому доказанные для них утверждения верны с вероятностью 1 для стохастических дифференциальных уравнений (в дальнейшем: СДУ).

Известны (см [1, 3]) теоремы сравнения для СДУ в случае, когда $\sigma^{(1)}(t, u) = \sigma^{(2)}(t, u)$ для всех (t, u). Однако для случая, когда это условие не выполняется, таких теорем нет. Оказывается, решение $\xi_t^{(1)}$ можно выразить через решение $\xi_t^{(2)}$, то есть $\xi_t^{(1)} = z(t, \xi_t^{(2)})$, где $z(t, u)$ находится по коэффициентам уравнений (1).

Теорема 1. *Если* $\inf_{u \in R}(z(t, u) - u) \geqslant 0$ *для всех* $t > 0$, *то* $\xi_t^{(1)} \geqslant \xi_t^{(2)}$ *для всех* $t \geqslant 0$.

На основе доказанных теорем сравнения предложен новый подход к исследованию потраекторой устойчивости СДУ. Пусть задано СДУ вида

$$d\xi_t = \sigma(t, \xi_t) * dW_t + b(t, \xi_t)dt, \;\; \xi_t|_{t=t_0} = \xi_0. \tag{2}$$

Возмущенное решение ξ_t уравнения (2) с начальным условием $\xi_0 = x_0$ *потраекторно устойчиво*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, \omega) > 0$ такое, что из неравенства $|x_0| < \delta$ вытекает, что $|\xi_t| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$. Обычно для СДУ рассматривается устойчивость в более слабых смыслах (см [4]). В данной работе представлены условия потраекторной устойчивости только для уравнений со случайными коэффициентами $\sigma(t, u)$.

Теорема 2. *Пусть для всех* $t \geqslant 0$ $|\xi_t| \leqslant K\eta_t$, *где* η_t *- неотрицательное решение потраекторно устойчивого СДУ,* $K = const > 0$. *Тогда решение уравнения (2) потраекторно устойчиво.*

Источники и литература

1) Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1983
2) Насыров Ф. С. Локальные времена, Симметричные интегралы и стохастический анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011
3) Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. К., 1961
4) Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969