Аксиоматизация расширений логики Данна-Белнапа

Петрухин Ярослав Игоревич

Студент (бакалавр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия

E-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru

В работе формулируются натуральные исчисления (без доказательств), аксиоматизирующие логику Данна-Белнапа ($\mathbf{E_{fde}}$) и её расширения произвольными одноместными и двухместными связками. При этом используются идеи, изложенные в [4, 5]. В [4] представлены натуральное исчисление для трёхзначной логики **LP** ($\mathbf{K_3^2}$) и метод, позволяющий получить натуральные исчисления для всех расширений **LP**. В [5] описан аналогичный результат для $\mathbf{K_3}$ и её расширений.

Пусть x, y, z — истинностные значения; $\star$ и $\circ$ — произвольные одноместная и двухместная логические связки, добавляемые к языку исходной логики, а $f_\star$ и $f_\circ$ — таблицы истинности, их определяющие; $\mathbb{F}$ — строка таблицы истинности вида $f_\star(x) = y$ или $f_\circ(x, y) = z$. Тогда $\mathbb{F}$ характеризуется выводимостью $\Gamma \vdash A$, если $\mathbb{F} \Leftrightarrow \Gamma \models A$. За счет присоединения к натуральному исчислению для исходной логики всех выводимостей, характеризующих добавляемые связки, в качестве правил вывода получается натуральное исчисление для расширения исходной логики.

Рассмотрим теперь четырёхзначную семантику логики $\mathbf{E_{fde}}$ [1, 2, 3]. Алфавит языка $\mathcal{L}$ логики $\mathbf{E_{fde}}$ состоит из множества пропозициональных переменных ($Prop$), множества логических связок: отрицания ($\neg$), конъюнкции ($\wedge$) и дизъюнкции ($\vee$); а также технических символов: правой и левой круглых скобок. Определение $\mathcal{L}$-формулы стандартно. Оценкой v языка $\mathcal{L}$ называем функцию, отображающую множество $Prop$ во множество истинностных значений, а именно: $\{1, b, n, 0\}$. Значения упорядочены следующим образом: $0 \preceq n$, $0 \preceq b$, $n \preceq 1$, $b \preceq 1$, а n и b несравнимы. Множество $\{1, b\}$ содержит выделенные значения. С содержательной точки зрения, значение 1 понимается как , b — , n — , 0 — . Оценка v распространяется на множество $Form$ всех $\mathcal{L}$-формул в соответствии с таблицами истинности.

$f_\neg$	
1	0
b	b
n	n
0	1

$f_\wedge$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	b	b	0	0
n	n	0	n	0
0	0	0	0	0

$f_\vee$	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	1	n	n
0	1	b	n	0

Отношение следования определяется следующим образом: $\Gamma \models_{\mathrm{E_{fde}}} A \Leftrightarrow \dot{\forall} v\colon \underset{B \in \Gamma}{\dot{\forall} B}\, v(B) \in \{1, b\} \Rightarrow v(A) \in \{1, b\}$. Язык $\mathcal{L}'$ получается за счет расширения языка $\mathcal{L}$ некоторым количеством произвольных одноместных ($\star$) и двухместных ($\circ$) связок. На основе $\mathcal{L}'$ получается логика $\mathbf{E_{fde}^{\star\circ}}$. Теперь можно сформулировать выводимости, характеризующие строки таблиц истинности для одноместных связок. Пусть A и B есть $\mathcal{L}'$-формулы, тогда:

$$f_\star(0) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \neg A, \star A \wedge \neg \star A, \neg \star A \models A \wedge \neg A \\ n & \Leftrightarrow \quad \neg A, \star A \vee \neg \star A \models A \wedge \neg A \\ b & \Leftrightarrow \quad \neg A \models (\star A \wedge \neg \star A) \vee (A \wedge \neg A) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \neg A, \star A \wedge \neg \star A, \star A \models A \wedge \neg A \end{cases}$$

$$f_\star(n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \star A \wedge \neg \star A, \neg \star A \models A \vee \neg A \\ n & \Leftrightarrow \quad \star A \vee \neg \star A \models A \vee \neg A \\ b & \Leftrightarrow \quad \models (\star A \wedge \neg \star A) \vee (A \vee \neg A) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \star A \wedge \neg \star A, \star A \models A \vee \neg A \end{cases}$$

$$f_\star(b) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg A, \star A \wedge \neg \star A, \neg \star A \models B \\ n & \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg A, \star A \vee \neg \star A \models B \\ b & \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg A \models \star A \wedge \neg \star A \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg A, \star A \wedge \neg \star A, \star A \models B \end{cases}$$

$$f_\star(1) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A, \star A \wedge \neg \star A, \neg \star A \models A \wedge \neg A \\ n & \Leftrightarrow \quad A, \star A \vee \neg \star A \models A \wedge \neg A \\ b & \Leftrightarrow \quad A \models (\star A \wedge \neg \star A) \vee (A \wedge \neg A) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A, \star A \wedge \neg \star A, \star A \models A \wedge \neg A \end{cases}$$

Выводимости для двухместных связок здесь не приводим — их нетрудно сформулировать по аналогии одноместными. Натуральное исчисление для $\mathbf{E}^{\star\circ}_{\mathbf{fde}}$ выглядит следующим образом (A, B и C есть $\mathcal{L}'$-формулы, $[A]^+$ — допущение; двойное подчеркивание означает, что правила могут применяться в обе стороны):

$$(\neg\neg)\ \frac{A}{\neg\neg A} \qquad (D)\ \frac{A \wedge (B \vee C)}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \qquad (\vee I_1)\ \frac{A}{A \vee B} \qquad (\vee I_2)\ \frac{B}{A \vee B}$$

$$(\vee E)\ \frac{A \vee B, \quad \begin{matrix}[A]^{+1}\\ C,\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^{+2}\\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\wedge I)\ \frac{\begin{matrix}[A]^+\\ B,\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]^+\\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}[A]^+\\ B \wedge C\end{matrix}}$$

$$(\wedge E_1)\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad (\wedge E_2)\ \frac{A \wedge B}{B} \qquad (DeM_1)\ \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)} \qquad (DeM_2)\ \frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)}$$

Эти правила вывода аксиоматизируют логику $\mathbf{E_{fde}}$ (их можно найти в [3]), а потому являются неотъемлемой частью любого её расширения. Для связок $\star$ и $\circ$ правила вывода будут выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{R}_\star(x, y)\ \frac{A_1, \dots, A_n}{B} \qquad \mathcal{R}_\circ(x, y, z)\ \frac{A_1, \dots, A_m}{B}$$

Правило $\mathcal{R}_\star(x, y)$ характеризует строку $f_\star(x) = y$ таблицы истинности $f_\star$, а правило $\mathcal{R}_\circ(x, y, z)$ строку $f_\circ(x, y) = z$ таблицы истинности $f_\circ$. При этом для каждой связки $\star$ нужно 4 правила вида $\mathcal{R}_\star(x, y)$, а для $\circ$ — 16 правил вида $\mathcal{R}_\circ(x, y, z)$. Например, строке $f_\star(0) = 0$ таблицы истинности $f_\star$ соответствует правило $\mathcal{R}_\star(0, 0)$:

$$\mathcal{R}_\star(0, 0)\ \frac{\neg A, \star A \wedge \neg \star A, \neg \star A}{A \wedge \neg A}$$

Источники и литература

1) Белнап Н. Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981. С. 208-239.
2) Белнап Н. Об одной полезной четырехзначной логике // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981. С. 240-265.
3) Dunn J.M. Partiality and its dual // Studia Logica, Вып.65. 2000. С. 5-40.
4) Kooi B., Tamminga A. Completeness via correspondence for extensions of the logic of paradox // The Review of Symbolic Logic, Вып.5. 2012. С. 720-730.
5) Tamminga A. Correspondence analysis for strong three-valued logic // Логические исследования Вып.20. 2014. С. 255-268.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность Д.В. Зайцеву за научное руководство.