Уточнение константы в неравенстве Эссеена за счет оптимизации сглаживания

Макаренко Владимир Александрович, Габдуллин Руслан Айдарович

студент, студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: vlamakarenko@gmail.com, ruslixag@gmail.com

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^n$ — независимые случайные величины с функциями распределения $F_k(x)$, характеристическими функциями $f_k(t)$, $E(X_k) = 0$ и $D(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$. Обозначим $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, $\overline{F}_n(x)$ функцию распределения нормированной суммы $\frac{1}{s_n}\sum_1^n X_k$, $\overline{f}_n(t) = \prod_{k=1}^n f_k(t/s_n)$ ее характеристическую функцию,

$$\varrho_k = \sup_{z>0}\left(\left|\int_{-z}^{z} x^3\,dF_k(x)\right| + z\int_{|x|\geqslant z} x^2\,dF_k(x)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

В 1968 году К.-Г. Эссеен [3] доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Если $\varrho_k < \infty$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, то при некотором $C < \infty$*

$$\Delta_n \equiv \sup_x\left|\overline{F}_n(x) - \Phi(x)\right| \leqslant C\frac{\sum_1^n \varrho_k}{s_n^3}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство этой теоремы основано на неравенстве Феллера

$$\Delta_n \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{|\overline{f}_n(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|}\,dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T},\ T > 0, \tag{1}$$

и значение константы C в [2] указано не было, хотя использованный метод позволял это сделать. Следуя этому методу, можно убедиться, что

$$C \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}(31 + 54\sqrt{2}) + \frac{2256}{\pi\sqrt{2\pi}} = 372.15018\ldots$$

В данной работе за счет использования более точного неравенства сглаживания

$$\Delta_n \leqslant \frac{b}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\left|\frac{\overline{f}_n(t)-e^{-t^2/2}}{t}\right|dt+\frac{2\sqrt{2}b(b+1)}{\pi\sqrt{\pi}(b-1)T},$$

справедливого для всех $T > 0$ и $b > 1$ (см., например, [1, 2]), и дополнительной оптимизации по параметрам T и b была доказана

Теорема 2. *В неравенстве Эссеена* $C \leqslant 288$.

Литература

1. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1976.
2. Шевцова И. Г. Точность нормальной аппроксимации: методы оценивания и новые результаты. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016.
3. Esseen C.- G. On the reminder term in the central limit theorem. 1968. Arkiv for Matematik. Band 8, nr 2. p.7-15.