

**ПОИСК НУЛЕЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ,
ПОДЧИНЕННЫХ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ
ПОДМНОЖЕСТВ.**

Ястребов Кирилл Сергеевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: yastrebovks@gmail.com

Определение 1. Назовем систему замкнутых ограниченных подмножеств $U = \{U_k\}_{k=0}^{\infty}$ в \mathbb{R} *сходящейся*, если отклонения этих множеств от нуля $d_k = \sup_{x \in U_k} \rho(x, 0)$ образуют сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ с монотонно убывающими членами.

Пусть задан многозначный функционал $\varphi : X \rightarrow P(\mathbb{R})$ на метрическом пространстве (X, ρ) , где $P(\mathbb{R})$ - совокупность непустых подмножеств в \mathbb{R} .

Определение 2. *Индексом точки* $x \in X$ относительно пары $(\varphi, \{U_k\})$ называется число $J(x)$, определяемое по следующей формуле:

$$J(x) = J_U^\varphi(x) := \begin{cases} 0, \varphi(x) \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) = \emptyset, \\ n = \max\{k \in \mathbb{N} | \varphi(x) \cap U_k \neq \emptyset\}, \exists k \in \mathbb{N}, \varphi(x) \cap U_k \neq \emptyset, \\ \infty, \varphi(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Определение 3. Будем говорить, что функционал φ подчинен сходящейся системе U , если для любого $x \in X$ такого, что $\varphi(x) \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) \neq \emptyset$, существует $x' \in X$, что $\rho(x, x') \leq d_{J(x)}$, и $J(x') > J(x)$.

Определение 4 [3]. График $Graph(\varphi)$ функционала φ называется $\{0\}$ -полным, если любая фундаментальная последовательность его элементов $\{(x_n, \gamma_n)\}_{n=1,2,\dots}$, $\gamma_n \in \varphi(x_n)$, $\gamma_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, сходится к некоторому элементу $(\xi, 0)$, где $\xi \in Nil(\varphi) = \{x \in X | 0 \in \varphi(x)\}$.

График $Graph(\varphi)$ функционала φ называется $\{0\}$ -замкнутым, если для каждого его предельного элемента вида $(\xi, 0)$ верно, что $\xi \in Nil(\varphi)$.

Получена следующая теорема о существовании и поиске нулей функционалов, подчиненных системе U , описанной выше.

Теорема 1. Пусть функционал $\varphi : X \rightarrow P(\mathbb{R})$ подчинен сходящейся системе U замкнутых подмножеств, и выполнено хотя бы одно из

условий:

- 1) X - полно и график $\text{Graph}(\varphi)$ функционала φ - θ -замкнут;
- 2) $\text{Graph}(\varphi)$ - θ -полон.

Тогда множество нулей $\text{Nil}(\varphi) \neq \emptyset$, и для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, начинающаяся из x_0 и сходящаяся к некоторой точке $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$, т.е. $0 \in \varphi(\xi)$. Причем

$$\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} d_{J(x_0)+j}.$$

Определение 5. Рассмотрим отображение, которое сопоставляет точке x множество всех таких точек $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$, что $\rho(x, \xi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} d_{\hat{I}_\varphi(x)+j}$. Обозначим его $\hat{\gamma}_\varphi : X \rightarrow P(\text{Nil}(\varphi))$.

Представляет интерес вопрос об устойчивости предложенного метода поиска нулей функционалов по отношению к изменению начальной точки. В результате изучения этого вопроса получен следующий результат.

Теорема 2. *Теорема 2. Пусть $\varphi_* : X \rightarrow \mathbb{R}$, где $\varphi_*(x) = \inf_{y \in \varphi(x)} \{|y|\}$, $x \in X$ - непрерывный функционал. Кроме того, пусть выполнено хотя бы одно из условий:*

- 1) множество $\text{Nil}(\varphi)$ - компактно,
- 2) любой замкнутый шар в X компактен.

Тогда многозначное отображение $\hat{\gamma}_\varphi$ секвенциально полунепрерывно сверху, т.е. для любого x_0 , любой последовательности $x_m \rightarrow x_0$ и любых $\xi_m \in \hat{\gamma}_\varphi(x_m)$ верно, что $\rho(\xi_m, \hat{\gamma}_\varphi(x_0)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Литература

1. Гайнуллова С. Р., Фоменко Т. Н. Функционалы, подчиненные сходящимся рядам, и каскадный поиск особенностей отображений. Математические Заметки, том 96, 2, 2014, с.314-317.
2. Фоменко Т. Н. Устойчивость каскадного поиска. Вестник Московского Государственного Университета, Серия Математическая, с. 171-190, Том 74, 5, 2010 г.
3. T. N. Fomenko. Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings. Topology Appl. 157, 760-773, 2010, с.760-773