Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Существование (k_0) -периодических и (k_0) -трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович

Кандидат наук

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана - это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. В работах [1]-[4] для модели Изинга описаны трансляционно-инвариантные меры Гиббса на дереве Кэли. Описанию периодических гиббсовских мер для некоторых моделей с конечным числом радиуса взаимодействия, которые, в основном, были либо трансляционно-инвариантными, либо периодическими с периодом два, посвящены работы ([5], [6]).

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребро, где V - множество вершин, L - множество ребер τ^k. Пусть G_k - свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ...a_{k+1}$. Известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерево Кэли порядка k и группой G_k. Поэтому мы отождествляем V и G_k(см. [1], [7]).

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup\limits_{m=0}^{n} W_m$, где $d(x, y)$-расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющее x и y . Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Обозначим через Ω_{V_n} пространство конфигураций, определенных на множестве V_n и принимающих значения из $\Phi = \{-1, 1\}$.

Рассмотрим гамильтониан модели Изинга

$$H_n(\sigma) = -J \sum_{x,y \in V_n} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

где $J \in R$.

Пусть $h_x \in R, x \in V$. Для каждого n определим меру μ_n на Ω_{V_n}, полагая

$$\mu_n(\sigma) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H_n(\sigma) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\}, \tag{2}$$

где $\beta = \frac{1}{T}$ (T-температура), $\sigma \in \Omega_{V_n}$, $Z_n^{-1}-$ нормирующий множитель.

Условие согласованности для $\mu_n(\sigma_n), n \geq 1$, определяется равенством

$$\sum_{\omega \in \Omega_{V_n} : \omega|_{V_{n-1}} = \sigma} \mu_n(\omega) = \mu_{n-1}(\sigma), \quad \forall \sigma \in \Omega_{V_{n-1}}. \tag{3}$$

Тогда в силу теоремы Колмогорова существует и притом единственная предельная мера μ на $\Omega_V = \Omega$ (которая называется предельной мерой Гиббса) такая, что для каждого $n = 1, 2, ...$

$$\mu(\sigma|_{V_n} = \sigma_n) = \mu_n(\sigma_n).$$

Меры (2) удовлетворяют (3) тогда и только тогда, когда совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ удовлетворяет

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} f(h_y,\theta), \tag{4}$$

где $S(x)$- множество "прямых потомков"точки $x\in V$ и $f(x,\theta)=arcth(\theta thx)$, $\theta=th(J\beta)$, $\beta=\frac{1}{T}, T$ - температура (см. [1], [2], [4]).

Определение 1. Совокупность величин $h=\{h_x, x\in G_k\}$ называется G_k^*-*периодической*, если $h_{xy}=h_x$ для $\forall x\in G_k, y\in G_k^*$. G_k-периодическая совокупность величин называется *трансляционно-инвариантной*.

Определение 2. Мера μ называется G_k^*-*периодической*, если она соответствует G_k^*-периодической совокупности величин h.

Для трансляционно-инвариантной совокупности величин h уравнение (4) имеет следующий вид

$$h = kf(h,\theta). \tag{5}$$

Из работ [3], [4] известно, что уравнение (5) имеет единственное решение $h=0$, если $\theta\in(0,\theta_c]=\frac{1}{k}$ и три решения $h=0,\pm h_*, h_*$- положительно , если $\theta\in(\theta_c,1)$.

Пусть $k\geq 2, k_0\geq 2$ такое, что $(k-k_0)-$ четное положительное число. Теперь с помощью h_* построим совокупность величин, удовлетворяющих функциональному уравнению (4).

Для$x\in V$ через $S_{k_0}(x)-$ обозначим произвольный набор из k_0 вершин множества $S(x)$, а остальные $k-k_0$ вершин обозначим через $S_{k-k_0}(x)$.

Построим совокупность величин $h=\{h_x, x\in V\}$ следующим образом:

(a_1). Если на вершине x имеем $h_x=h_*$, то на каждую вершину из $S_{k_0}(x)$ ставим значение h_*, а на каждую вершину из $S_{k-k_0}(x)$ ставим одно из значений h_* и $-h_*$ так, что

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0. \tag{6}$$

т.е. на половину вершин из $S_{k-k_0}(x)$ ставим значение h_* , а на другую половину $-h_*$.

(a_2). Если на вершине x имеем $h_x=-h_*$, то на каждую вершину из $S_{k_0}(x)$ ставим значение $-h_*$, а на каждую вершину из $S_{k-k_0}(x)$ ставим одно из значений h_* и $-h_*$ так, что выполняется (6).

Совокупность величин h, построенную по правилам (a_1) и (a_2), назовем $(k_0)-$трансляционно-инвариантной.

Утверждение 1. Любая $(k_0)-$трансляционно-инвариантная совокупность величин на τ^k удовлетворяет функциональному уравнению (4).

Определение 3. Меру, соответствующую $(k_0)-$трансляционно-инвариантной совокупности величин, назовем $(k_0)-$трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $k\geq 2, k_0\geq 2$ такие, что $(k-k_0)-$четное положительное число и $T\in(0,T_{c,k_0})$ (т.е. $\theta\in(\theta_c,1)$). Тогда для ферромагнитной модели Изинга на дереве Кэли порядка k существуют ровно две k_0-трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

Из работы [5] имеем, что при $\theta\in(-1,-\theta_c)$ система уравнений (4) имеет три решения вида $h_*^{\mp}=(-h_*,h_*), h_*^0=(0,0), h_*^{\pm}=(h_*,-h_*)$.

Теперь с помощью $h_*^{\mp}$, аналогичным образом, построим совокупность величин, которых назовём $(k_0)-$ периодической.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $k\geq 2, k_0\geq 2$ такие, что $(k-k_0)-$четное положительное число и $T\in(0,T_{c,k_0})$ (т.е.$\theta\in(-1,-\theta_c)$). Тогда для антиферромагнитной модели Изинга на дереве Кэли порядка существуют ровно две $(k_0)-$периодические меры Гиббса.

Замечание. Все выше рассматриваемые и доказанные существования меры не являются периодическими (в частности, и не трансляционно-инвариантными).

Источники и литература

1) Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific.,2013.
2) Блехер П.М.,Ганиходжаев Н.Н. О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете// Теория вероят. и ее примен. 1990, Т.35, 2, С. 220–230
3) Spitser F. Markov random field on infinity tree// Ann.Probab. 1975, 3, С.387-398.
4) Preston C. Gibbs states on countable sets. Cambridge Univ. Press,1974.
5) Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли// ТМФ 1997, Т.111, 1, С.109–117.
6) Розиков У.А. Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса// ТМФ 1997, Т.112, 1, С.170–176.
7) Ганиходжаев Н.Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли// ДАН РУз 1994, 4, С. 3-5.