Секция «Геометрия и топология»

О классификации особенностей, эквивариантно простых относительно представлений конечных абелевых групп

Асташов Евгений Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия

E-mail: ast-ea@yandex.ru

Пусть заданы представления абелевой группы G на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. Функция $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется эквивариантной относительно пары заданных представлений, если для любых $\lambda \in G,\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $g(\lambda \cdot \mathbf{z}) = \lambda \cdot g(\mathbf{z})$. Это понятие естественным образом переносится на ростки функций, а также на ростки диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$.

Кольцо эквивариантных ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ действует на множество эквивариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Эквивариантный росток функции $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем эквивариантно простым относительно заданных представлений группы G, если при всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой (а значит, и любой) точки его орбиты в пространстве r-струй эквивариантных ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ пересекается лишь с конечным числом других орбит.

Два эквивариантных ростка $f, g\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем эквивариантно правоэквивалентными, если существует эквивариантный росток диффеоморфизма $\Phi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, для которого $g = f \circ \Phi$. Существует общая задача классификации с точностью до такой эквивалентности особых ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, эквивариантно простых относительно различных представлений абелевых групп на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$.

Перечислим некоторые известные работы, в которых рассматривались близкие по своей постановке задачи.

В работе [1] дается хорошо известная классификация простых особенностей (ADE-особенности) без учета свойств эквивариантности. Можно рассматривать этот результат как решение общей задачи в случае, когда оба заданных действия группы G тривиальны.

В работе [2] дается классификация простых особенностей на многообразии с краем. Эта классификация эквивалентна классификации простых особенностей, инвариантных относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ по одной из координат:

$$(-1) \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n) = (-z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Можно рассматривать этот результат как решение общей задачи в случае, когда заданное действие группы на $\mathbb{C}$ тривиально.

В работе [3] дается классификация простых нечетных особенностей, то есть особенностей, эквивариантных относительно нетривиальных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. В частности, доказано, что при $n \geq 3$ таких особенностей не существует вовсе.

В ходе доклада будет рассказано о некоторых новых классификационных результатах для случая действий других конечных абелевых групп.

Источники и литература

1) В. И. Арнольд. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля Ak, Dk, Ek и лагранжевы особенности. Функциональный анализ и его прил., т. 6, вып. 4 (1972), 3-25.
2) В. И. Арнольд. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли Bk, Ck, F4 и особенности эволют. УМН, т. 33, вып. 5 (1978), 91-107.
3) W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions. J. of Geometry and Physics, 71 (2013), 58-72.