Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов

Попков Кирилл Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Пусть имеется схема из функциональных элементов S, реализующая булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [1, 2, 3]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(x_1, \ldots, x_n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_2(x_1, \ldots, x_n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество T, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [3], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

В качестве неисправностей функциональных элементов будем рассматривать однотипные константные неисправности типа p на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно заданной булевой константе p.

Пусть $B = \{\&, \vee, \neg\}$, значение $p \in \{0, 1\}$ зафиксировано и T — единичный диагностический тест для некоторой схемы S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D_p(T)$ — длина теста T; $D_p(S) = \min D_p(T)$, где минимум берётся по всем единичным диагностическим тестам T для схемы S; $D_p(f) = \min D_p(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D_p(n) = \max D_p(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D_p(f)$. Функция $D_p(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного диагностического теста.

Ранее Н. П. Редькиным в работе [4] при $n \geqslant 1$ были получены оценки $D_1(n) \leqslant 2n + 1$ и $D_0(n) \leqslant 2n + 1$.

Выделим два возможных представления функции f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \qquad (*)$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$$f(x_1, \dots, x_n) = K_1 \vee \dots \vee K_m, \qquad (**)$$

где $m \geqslant 1$ и каждое слагаемое K_j, $j = 1, \dots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x_{i_j}}$, либо $x_{i_j}x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \dots, n\}$.

Отметим, что представление (*) является частным случаем представления (**).

Теорема 1. Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, отличной от тождественной единицы, справедливо равенство

$$D_1(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде (*)}, \\ 1, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде (**), но не в виде (*)}, \\ 2, & \textit{если функция } f \textit{ не представима в виде (**)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D_1(f)$ не определено.

Следствие 1. *Для любого n справедливо равенство $D_1(n) = 2$.*

Выделим ещё одно возможное представление функции f:

$$f(x_1, \dots, x_n) = D_1 \& \dots \& D_m, \qquad (***)$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель D_j, $j = 1, \dots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x_{i_j}}$, либо $x_{i_j} \vee x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \dots, n\}$.

Отметим, что представление (*) является частным случаем представления (***).

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, отличной от тождественного нуля, справедливо равенство*

$$D_0(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде (*)}, \\ 1, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде (***), но не в виде (*)}, \\ 2, & \textit{если функция } f \textit{ не представима в виде (***)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D_0(f)$ не определено.

Следствие 2. *Для любого n справедливо равенство $D_0(n) = 2$.*

Следствия 1 и 2 уточняют оценки $D_1(n) \leqslant 2n + 1$ и $D_0(n) \leqslant 2n + 1$ из [4].

Источники и литература

1) Яблонский С.В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.
2) Яблонский С.В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.
3) Редькин Н.П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
4) Редькин Н.П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — №5. — С. 43–46.

Слова благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н. П. Редькину за внимание к работе и ценные замечания.