Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О стабильности индекса дифференциальных операторов в анизотропных пространствах

Туманян Ани Гагиковна

Аспирант

Российско-Армянский (Славянский) университет, Институт математики и высоких технологий, Кафедра математики и математического моделирования, Ереван, Армения

E-mail: ani.tumanyan92@gmail.com

В данной работе изучены определенные вопросы стабильности индекса операторов, действующих в анизотропных пространствах Соболева на всем R^n, относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения. Исследованы нетеровость и индекс дифференциальных операторов в анизотропных пространствах с различными весами. Полученные результаты применяются при исследовании индекса определенных классов полуэллиптических уравнений. В работе применяются ранее полученные результаты для инвариантности индекса на шкале анизотропных пространств [5] и критерий нетеровости для операторов с постоянными коэффициентами [1]. Вопросам нетеровости полуэллиптических операторов посвящены также работы [2,3]. Индекс и нетеровость операторов имеют важное значение для таких вопросов, как существование и единственность решения, условия разрешимости соответствующих уравнений, спектральные свойства операторов [4]. С многочисленными практическими приложениями связано изучение этих вопросов для полуэллиптических операторов. Чем и обуславливается актуальность рассматриваемых задач.

Рассмотрим

$$P\left(x,\mathbb{D}\right)=\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{1}$$

и дифференциальное выражение с младшими членами

$$T\left(x,\mathbb{D}\right)=\sum_{(\alpha:\nu)< s} b_\alpha(x)D^\alpha, \tag{2}$$

где $n,s\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\nu\in\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}_+^n$ множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{N}^n$ множество мультииндексов с натуральными компонентами), $(\alpha:\nu)=\frac{\alpha_1}{\nu_1}+...+\frac{\alpha_n}{\nu_n},\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n},\ D_k=i\frac{\partial}{\partial x_k}, x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n, a_\alpha(x),b_\alpha(x)$ достаточно гладкие функции.

Для $k\in\mathbb{Z}_+,\nu\in\mathbb{N}^n$ через $H_\nu^k(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство измеримых функций $\{u\}$ с нормой

$$\|u\|_{k,\nu}=\left(\sum_{(\alpha:\nu)\le k}\int\left|D^\alpha u\left(x\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\infty. \tag{3}$$

Пусть $q(x)\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ положительная функция такая, что $\frac{|D^\beta q(x)|}{q(x)}\to 0$ при $|x|\to\infty$ и произвольном $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$. Через $H_\nu^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство измеримых функций $\{u\}$ с нормой

$$\|u\|_{k,\nu,q}=\left(\sum_{(\alpha:\nu)\le k}\int\left|D^\alpha u\left(x\right)q(x)^{(k-(\alpha:\nu))}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\infty. \tag{4}$$

В работе получено условие достаточное для того, чтобы нетеровый оператор $P(x,\mathbb{D})$, действующий из всего пространства $H_\nu^{k+s}(\mathbb{R}^n)$ в $H_\nu^k(\mathbb{R}^n)$, являлся также нетеровым, как оператор из $H_\nu^{k+s,q}(\mathbb{R}^n)$ в $H_\nu^{k,q}(\mathbb{R}^n)$. Используя данный результат и свойства рассматриваемых весовых пространств, получено достаточное условие для равенства индекса нетерового оператора $P(x,\mathbb{D}) : H_\nu^{k+s}(\mathbb{R}^n) \to H_\nu^{k}(\mathbb{R}^n)$ с индексом оператора $(P(x,\mathbb{D}) + T(x,\mathbb{D})) : H_\nu^{k+s}(\mathbb{R}^n) \to H_\nu^{k}(\mathbb{R}^n)$. Построены примеры, демонстрирующие существенность найденных условий. Для полуэллиптических операторов с постоянными коэффициентами в главной части и при определенных условиях на коэффициенты младшей части доказано равенство нулю их индекса.

Источники и литература

1) Дарбинян А. А, Туманян А.Г. Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами // Вестник РАУ (2014) № 2, Ер.: Изд-во РАУ 2014. С. 4–14.

2) Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа //Сиб. матем. журн., 49:5 (2008), С. 1064–1076.

3) Карапетян Г. А., Дарбинян А. А. Об индексе полуэллиптического оператора //Известие НАН Арм., Мат. (2007) Т. 42. № 5. С. 33–50.

4) Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. Новосибирск, Изд.-во Института Математики, 2006.

5) Туманян А. Г. Об инвариантности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств // Известие НАН Арм., Математика (в печати).