Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вероятности высоких выбросов траекторий процессов гауссовского хаоса в случае зависимых процессов

Жданов Александр Иванович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: zhdanova_ e@mail.ru

Пусть g - однородная функция степени $\beta > 0$, то есть для всех $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ и всех $a > 0$, $g(a\mathbf{v}) = a^\beta g(\mathbf{v})$. В общей постановке интересна задача асимптотического поведения вероятности высоких выбросов траекторий процесса гауссовского хаоса

$$P\left(\max_{t\in[0,T]} g(\xi(t)) > u\right),\ u \to \infty$$

где $\xi(t)$ - гауссовский d-мерный векторный процесс. Эффективным методом отыскания точных асимптотических оценок в подобных задачах является метод двойных сумм: поиска точной асимптотики вероятности на бесконечно малых интервалах (основная лемма) и последующего доказательства "малости"вероятности неоднократных выбросов траекторий исследуемого процесса по сравнению с вероятностью однократных выбросов.

Пусть $\xi(t)$ - центрированный гауссовский стационарный d-мерный векторный процесс с п.н. непрерывными траекториями, такой что ковариационные функции его компонент удовлетворяют условию Пикандса

$$r_i(t) = 1 - c_i|t|^\alpha + o(|t|^\alpha),\ t \to 0, 0 < \alpha \le 2, c_i > 0,\ i = 1, \ldots, d,\ r_i(t)0$$

Предположим, что $R(t,s) := E\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(s)$ удовлетворяет предельному соотношению

$$R(t,s) = R(|t-s|) = R - |t-s|^\alpha B + |t-s|^\alpha o_M(1),\ t,s \to 0.$$

для $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ и $B = B^{\mathrm{T}} > 0$, где $o_M(1)$ - матрица, компоненты которой стремятся к нулю при $t,s \to 0$. В этих условиях доказана основная лемма, установленная в [1] для случая независимых процессов, а также получена точная асимптотика исследуемой вероятности при $g(\mathbf{v}) = v_1v_2$. В частности,

Лемма 1. *В случае $R = E_d$ и $B = diag(c_1, \ldots, c_d), c_i > 0$*

$$P\left(\max_{t\in[0,Tu^{-2/\alpha\beta}]} g(\xi(t)) > u\right) = h_0\left(\frac{u}{g}\right)^{(m-1)/\beta} \exp\left(-\frac{u^{2/\beta}}{2g^{2/\beta}}\right)$$

$$\times \int_{\mathcal{M}_\varphi} j(\varphi) H_\alpha(T(v^{\mathrm{T}}(\varphi)Cv(\varphi))^{1/\alpha}) dV_\varphi (1 + o(1)),\ u \to \infty,$$

где $H_\alpha(T)$ - константа Пикандса, $g = \max_{\varphi\in\Pi_{d-1}} g(\varphi)$, $\mathcal{M}_\varphi = \{\varphi : g(\varphi) = g\}$, $m = dim\mathcal{M}_\varphi$, $v(\varphi)$ - соответствующие направлениям φ вектора в $\mathbb{R}^d$ такие, что $g(v(\varphi)) = 1$, и

$$j(\varphi) = \frac{J(1,\varphi)|\det g''(\varphi)_{d-m}|^{-1/2}}{\int_{\mathcal{M}_\varphi} J(1,\varphi)|\det g''(\varphi)_{d-m}|^{-1/2} dV_\varphi}$$

Источники и литература

1) Piterbarg Vladimir I., High extrema of Gaussian chaos processes. - Extremes, 2016, v. 19, No 2, p. 1-20

Слова благодарности

Автор выражает глубокую признательность профессору Владимиру Ильичу Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.