Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Аппроксимации решений эволюционных уравнений в областях разветвленных многообразий с помощью формул Фейнмана.

Научный руководитель – Смолянов Олег Георгиевич

Дубравина Виктория Андреевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: dubravina_vika@mail.ru

Формулы Фейнмана представляют решения эволюционных уравнений в виде пределов последовательностей интегралов по декартовым степеням некоторого пространства E при стремящейся к бесконечности кратности. Если E – конфигурационное пространство, то формула Фейнмана называется лагранжевой; если же пространство E – фазовое, то – гамильтоновой.

С помощью лагранжевых формул Фейнмана найдено представление решений параболических дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций, определенных на разветвленных поверхностях произвольной размерности. При этом разветвленной поверхностью называется дизъюнктное объединение K нескольких гладких n-мерных многообразий K_i с кусочно-гладким краем. Предполагается, что решение уравнения удовлетворяет условиям согласования на границах областей, объединение которых рассматривается в качестве разветвленной поверхности.

Получено представление решения задачи Коши $\frac{d}{dt}\psi(t) = A\psi(t), \psi(0) = f_0$, где $\psi : [0,\infty) \to D_A$, $f_0 \in D_A$, относительно функций, определенных на разветвленной поверхности K. Пусть операторно-значная функция $F(\cdot)$ задана равенством $F(t) = I_2G_2(t)G_1(t)I_1$, при $t > 0$, где $I_1 : L_1(K) \to L_1(Z)$, $I_2 : L_1(Z) \to L_1(K)$, $G_2(t) : L_1(Z) \to L_1(Z)$, $G_1(t) : L_1(Z \to L_1(Z)$. При этом I_1 – вложение $L_1(K)$ в $L_1(Z)$, а I_2 – сужение $L_1(Z)$ на $L_1(K)$.

$$(G_2(t)f)_i(q) = \frac{1}{(2\pi tc_i(q))^{\frac{n}{2}}} \int_{Z_i} e^{\frac{-\|q-r\|^2}{2tc_i(q)}} f_i(r) vol(dr),$$

где $Z = \bigsqcup_i Z_i$, а вид функций $G_1(t)$ зависит типа разветвленной поверхности и условий согласования. Подобного вида функции $G_1(t)$ и $G_2(t)$ рассматриваются, например, в [1,2,3].

Теорема. Пусть $\psi : [0,\infty;) \to L_1(K)$ решение поставленной выше задачи Коши с начальным условием $f_0 \in L_1(K)$. Тогда для любого $t > 0$ справедлива следующая формула Фейнмана:

$$\psi;(t) = \lim_{k\to\infty} F(t/k)^k f_0.$$

При этом, каково бы ни было $\alpha > 0$, сходимость последовательности $F(t/k)^k f_0$ равномерна по $t \in [0,\alpha]$.

Источники и литература

1) М.Х. Нуман Эльшейх. Операторы Шредингера на разветвленных многообразиях и их аппроксимации // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. РУДН, Москва, 2014. 113 с.
2) O. G. Smolyanov, H. von Weizsäcker, O. Wittich // Potential Analysis. 2007, Volume 26, Issue 1, pp 1–29.

3) O. G. Smolyanov, H. von Weizsacker, O. Wittich // Doclady Mathematics. 2000, Volume 61, N 2, pp 230-234.