Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Уравнения Лиувилля для бесконечно-мерных Гамильтоновых систем.

Научный руководитель – Смолянов Олег Георгиевич

Быстров Дмитрий Алексеевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: dronte2008@yandex.ru

Итак, пусть $C^{\infty}_{\mathrm{b,loc}}(E)$ - пространство функций бесконечно дифференцируемых, ограниченных на ограниченных множествах вместе со всеми своими производными.
Обозначим его за $\mathcal{E}(E)$.
Теперь нам понадобится ввести скобку Пуассона: $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{E}(E) \to \mathcal{E}(E)$.
Пусть $\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}^1$, $x \in E$. Тогда скобка Пуассона для них будет равна $\{\varphi,\psi\}(x) = \varphi'(x)[I(\psi'(x))] \ \in \mathbb{R}^1$.

Пусть так же $g \in \mathcal{E}(E)$. Тогда определим оператор L_t, как оператор, действующий на этом пространстве, т.е. $L_t : \mathcal{E}(E) \to \mathcal{E}(E)$, а так же, пусть $L_t : g \mapsto \{\mathcal{H}_t,\ g\}$.

Тогда $(\mathcal{L}_t(g))(x) \ = \ \{\mathcal{H}_t,\ g\}(x) \ = \ \mathcal{H}_t'(x)[I(g'(x))]$

Теперь рассмотрим, что такое сопряжённый оператор к нашему. Как известно, что если $A : X \to Y$, то $A^* : Y^* \to X^*$, причём $A^*g \mapsto g(A(x))$, где $x \in X$.

Тогда наш оператор L_t будет иметь сопряжённый оператор L_t^*, действующий на пространстве $\mathcal{E}^*(E)$, т.е. $\mathcal{L}_t^* : \mathcal{E}^*(E) \to \mathcal{E}^*(E)$.

Попробуем его расписать более подробно:
Пусть $\mu \in \mathcal{E}^*(E),\ f \in \mathcal{E}(E)$.
Будем считать, что элементы $\mathcal{E}^*(E)$ переводят функции из $\mathcal{E}(E)$ в числа $\mathbb{R}^1$ следующим образом:
$\mu(f) = \int\limits_E f(z)\mu(dz)$
Тогда:
$(L_t^*(\mu))(f) \ = \ \int\limits_E f(z)[[L_t^*\mu](dz)]$
Теперь вспомним то, как связаны значение сопряжённого оператора и исходного.
$\mathcal{L}_t^* : \mu(\cdot) \mapsto \mu(L_t(\cdot))$
Таким образом:
$(\mathcal{L}_t^*(\mu))(f) \ = \ \mu(L_t(f)) \ = \ \int\limits_E [[L_t(f)](z)]\mu(dz)$
Подставим выражение для L_t:
$(\mathcal{L}_t^*(\mu))(f) \ = \ \mu(L_t(f)) \ = \ \mu(\{\mathcal{H}_t,\ f\}) \ = \ \int\limits_E \{\mathcal{H}_t,\ f\}(z)\mu(dz)$
Подставим скобку Пуассона:
$(\mathcal{L}_t^*(\mu))(f) \ = \ \mu(L_t(f)) \ = \ \mu(\{\mathcal{H}_t,\ f\}) \ = \ \mu(\mathcal{H}_t'(\cdot)[I(f'(\cdot))]) \ = \ \int\limits_E \mathcal{H}_t'(z)[I(f'(z))]\mu(dz)$
Используем то, что $I^* = -I$:
$\mu(\mathcal{H}_t'(\cdot)[I(f'(\cdot))]) \ = \ \mu(f'(\cdot)[-I(\mathcal{H}_t'(\cdot))]))$

Так можно сделать, т.к. пусть $I : x_1 \mapsto x_2$, тогда $I^* : y_2 \mapsto y_1$, причём
$y_1(x_1) = y_2(I(x_1)) \ = \ (I^*(y_2))[x_1]$
Теперь вспомним, что из первого уравнения в задаче Коши $\dot{z}(t) = I(\mathcal{H}'_t(z(t)))$
т.е. если мы возьмём решение задачи Коши, то оно будет удовлетворять этому условию.
А решение в предыдущем параграфе обозначалось $z_{z_{0,s}}$. Т.о.
$\mu(f'(\cdot)[-I(\mathcal{H}'_t(\cdot))])) \ = \ \mu(f'(\cdot)[-\dot{z}_{z_{0,s}}])$
В этом месте нужно воспользоваться теоремой о перестановке пределов... и тогда получится искомое

$$(L_t^*\mu, f)_{M(E),\mathcal{E}(E)} \ = \ \int f\{\mathcal{H}_t, \mu\}$$