Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О классе плотностей в задаче Канторовича с ограничением

Научный руководитель – Богачев Владимир Игоревич

Доледенок Анна Николаевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: anya11235@mail.ru

Рассматриваются аналоги классических задач оптимальной транспортировки (см. [1,6]) с ограничениями на плотности мер. Такие проблемы изучаются в недавних работах [2,3,4,5].

Пусть пространство $(T, \mathcal{A}, \lambda)$ — счетная степень отрезка [0;1], наделенная счетной степенью меры Лебега λ. Пусть заданы неотрицательные функции $f, g \in L^1(\lambda)$ и на пространстве $(T \times T, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \lambda \otimes \lambda)$ задана неотрицательная функция $\chi \in L^1(\lambda \otimes \lambda)$. Рассмотрим выпуклое множество интегрируемых функций с фиксированными проекциями

$$\Gamma_\chi(f, g) = \{h \in L^1(\lambda \otimes \lambda) \colon 0 \le h \le \chi, \text{ где } f(x) = \int_T h(x, y)\, \lambda(dy),\ g(y) = \int_T h(x, y)\, \lambda(dx)\}.$$

Аналогичный класс $\Gamma_\chi(\mu, \nu)$ можно определить для суслинских пространств $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ с борелевскими вероятностными мерами.

Лемма 1. *Пусть даны два суслинских пространства с борелевскими вероятностными безатомическими мерами $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и $\mu \otimes \nu$-измеримое множество $U \subset X \times Y$ положительной меры. Тогда существует ненулевая функция $\xi \in L^1(\mu \otimes \nu)$ с носителем в U такая, что $\int_X \xi(x, y)\, \mu(dx) = 0$ п.в. по мере ν и $\int_Y \xi(x, y)\, \nu(dy) = 0$ п.в. по мере μ.*

Лемма 1 позволяет получить характеристику крайних точек выпуклого класса $\Gamma_\chi(f, g)$, а также доказать аналогичный результат при более общих предположениях.

Лемма 2. *Пусть даны два суслинских пространства с борелевскими вероятностными безатомическими мерами $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Функция $h \in \Gamma_\chi(\mu, \nu)$ является крайней точкой $\Gamma_\chi(\mu, \nu)$ тогда и только тогда, когда $h = 1_W \chi$ для некоторого измеримого по мере $\mu \otimes \nu$ множества $W \subset X \times Y$.*

Пусть функция стоимости $c \in L^\infty(\lambda \otimes \lambda)$ такова, что для всякой пары индексов (i, j), где $1 \le i < \infty, 1 \le j < \infty$, существует производная $\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial y_j}$. Пусть также для некоторого числа $N \in \mathbb{N} \bigcup \infty$ существует не более чем счетный набор дизъюнктных открытых множеств $\{G_k\}_{k=1}^N, G_k \subset T \times T$ такой, что

(I) для всякого $k \le N$ справедливо неравенство $\lambda(G_k) > 0$; **(II)** $\lambda\big(T \times T \backslash (\bigsqcup_{k=1}^N G_k)\big) = 0$; **(III)** для всякого $k \le N$ существует пара индексов (i_k, j_k) такая, что: функция $\frac{\partial^2 c}{\partial x_{i_k} \partial y_{j_k}}$ знакопостоянна на G_k.

Рассмотрим следующий линейный функционал на $\Gamma_\chi(f, g)$:

$$I_c(h) = \int_{T \times T} c(x, y) h(x, y)\, \lambda(dx\, dy). \quad (1)$$

Теорема. *Пусть на бесконечномерном кубе $(T, \mathcal{A}, \lambda)$ с мерой Лебега функция c удовлетворяет условиям (I) – (III), фиксирована неотрицательная функция $\chi \in L^1(\lambda \otimes \lambda)$ и неотрицательные функции $f, g \in L^1(\lambda)$ таковы, что множество $\Gamma_\chi(f, g)$ непусто. Если функция h минимизирует функционал (1), то h — крайняя точка множества $\Gamma_\chi(f, g)$.*

Источники и литература

1) Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа - Канторовича: достижения, связи и перспективы // Успехи математических наук, Том 67. 2012. No. 5. С. 3-110.
2) Korman J., McCann R.J. Insights into capacity constrained optimal transport // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 110. 2013. P. 10064–10067.
3) Korman J., McCann R.J. Optimal transportation with capacity constraints // Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 367. 2015. P. 1501–1521.
4) Korman J., McCann R.J., Seis C. An elementary approach to linear programming duality with application to capacity constrained transport // J. Convex Anal., Vol. 22. 2015. P. 797–808.
5) Korman J., McCann R.J., Seis C. Dual potentials for capacity constrained optimal transport // Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol. 54. 2015. P. 573–584.
6) Villani C. Optimal Transport: Old and New. Springer, New York, 2009.