Секция «Геометрия и топология»

Об оптимальном положении компактов в пространствах с еклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Малышева Ольга Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: osm95@mail.ru

Пусть M обозначает метрическое пространство с функцией расстояния d, $\mathcal{P}(M)$ — семейство непустых подмножеств M, а $\mathcal{H}(M)$ — семейство непустых замкнутых ограниченных подмножеств M. Обозначим через G группу движений в $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию. В частности, будем рассматривать $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ с введенной на нем эквивалентностью ν: два элемента будем считать эквивалентными, если один из другого получается движением $O \in G$. Обозначим через $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ пространство таких классов эквивалентности.

Определение 1. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A,B) = \inf\Big\{r : \big(A \subseteq B_r(B)\big) \wedge \big(B \subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Определение 2. *Расстоянием в евклидово инвариантной метрике Громова–Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_{EGH}(A,B) = \inf_O\Big\{\mathrm{d}_H(A,OB)\Big\},$$

где O — движение пространства, сохраняющее ориентацию.

Определение 3. Движение O, на котором достигается $d_{EGH}(A,B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A,OB) — *оптимальным взаимным расположением.*

Теорема 1. *Пусть непустые компакты A и B находятся в оптимальном положении. Тогда все компакты между A и B, в паре с каждым из компактов A и B, — тоже в оптимальном положении в смысле евклидово инвариантной метрики Громова–Хаусдорфа.*

Рассмотрим пространство $\{M_1, M_2, M_3\}$ с заданными расстояниями $d(M_2,M_3) = a$, $d(M_1,M_3) = b$, $d(M_1,M_2) = c$, $a \geq b \geq c$. Тогда в качестве реализации данного пространства в пространстве $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, наделенном метрикой d_{EGH}, можно взять отрезок $A = [A_1, A_2]$ длины $2(a+b)$, шар B радиуса b и отрезок $C = [C_1, C_2]$ длины $2(a+b-c)$. Множества A, B и C можно разместить в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы для каждой пары из них это положение было оптимальным.

Определение 4. *Чебышевский центр* множества $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ — это центр шара в M с наименьшим возможным радиусом, которому принадлежит A; радиус этого шара называется чебышевским радиусом.

Теорема 2. *Пусть X и Y — непустые ориентированно подобные компакты в $\mathbb{R}^n$. Тогда $d_{EGH}(X,Y) = |R_Y - R_X|$, и если эти компакты находятся в оптимальном положении, то их чебышевские центры совпадают. Более того, положение, в котором $O_X = O_Y$, а X и Y — гомотетичны с центром в O_X, является оптимальным.*