

Классификация высотных частично симметричных атомов**Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич****Трифорова Виктория Александровна***Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
 Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
 приложений, Москва, Россия

E-mail: trifonovaviktoriya2012@yandex.ru

Пусть M^2 - гладкое компактное двумерное многообразие, $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ - функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2 : f = k, k \in \mathbb{R}\}$ - её особый уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$ не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне ($\{f = k\}$).

Определение 1. Атомом называется пара $(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$ с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$. Атом называется ориентируемым, если эта поверхность ориентируема. Граф $f^{-1}(k)$ называется остовом атома. Два атома называются изоморфными, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию. Будем говорить, что атом $(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$ порожден функцией f . Второе эквивалентное определение атома как "оснащённой" пары см. в [1]

Определение 2. Назовем атом, порожденный функцией f высотным, если существует такое вложение $g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(g(p))$ для каждой точки $p \in g(M^2)$, где z — стандартная координата в пространстве \mathbb{R}^3 , т. е. z — функция высоты на $g(M^2)$.

Определение 3. Симметрией атома $X = (P^2, K)$ называется сохраняющий ориентацию и оснащение гомеоморфизм оснащенной пары (P^2, K) на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии, т.е. класс эквивалентности изотопных гомеоморфизмов оснащенной пары (P^2, K) на себя. Отметим, что при таком определении группа $\text{SYM}(X)$ симметрий атома $X = (P^2, K)$ дискретна.

Определение 4. Конечный связный граф G , некоторые ребра которого ориентированы, называется ориентированным f -графом, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра-петли. Подробнее о построении f -графа по атому и его свойствах в [1, 2, 3]

Определение 5. Атом $X = (P^2, K)$ является максимально симметричным тогда и только тогда, когда группа его симметрий $\text{SYM}(X)$ транзитивно действует на множестве рёбер атома X .

Утверждение 1. Пусть $X = (P^2, K)$ - атом с группой симметрий $\text{SYM}(X)$, а G - соответствующий ему f -граф. Тогда $\text{SYM}(X)$ транзитивно действует на кольцах одного цвета $\iff \text{SYM}(G)$ транзитивно действует на ориентированных циклах.

Теорема. Высотный атом, группа симметрий которого транзитивно действует на кольцах белого цвета, изоморфен одному из атомов следующего списка: $A_n^1\{p\}$, ($n \geq 1$), $D_n\{k, p\}$, ($n \geq 1$), $C_n\{p\}$, ($n \geq 1$), $P_1\{k, l, p\}$, $P_2\{k, l, p\}$, $P_3\{k, l, m, p\}$, $P_4\{k, p\}$, $P_5\{k, l, m, p\}$, $R_1\{k, l, p\}$, $R_2\{k, l, p\}$, $R_3\{k, l, p\}$, $R_4\{k, l, p\}$, $R_5\{k, l, p\}$, $R_6\{k, l, p\}$, $R_7\{k, p\}$, $R_8\{k, l, p\}$, $R_9\{k, l, p\}$, $R_{10}\{k, l, p\}$, $R_{11}\{k, l, m, p\}$, $R_n^1\{k, l, p\}$, ($n \geq 3$), $R_n^2\{k, l, m, p\}$, ($n \geq 3$), где $k, l, m \geq 1; p \in \mathbb{Z}_+$.

Источники и литература

- 1) Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, // Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 444 с., (1999)
- 2) И. М. Никонов, Н. В. Волчанецкий, “Максимально симметричные высотные атомы”// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2013,— №2 .— С. 5-8
- 3) И. М. Никонов, “Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий” // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2016. — № 6. — С. 17–25.