Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Ошибка схемы Эйлера вырожденных диффузий по типу Колмогорова с негладкими коэффициентами

Научный руководитель – Конаков Валентин Дмитриевич

Кожина Анна Александровна

Аспирант

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: annaakozhina@gmail.com

Схема Эйлера - популярный и хорошо изученный метод аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. Оценки слабой сходимости в случае гладких коэффициентов СДУ были получены еще в статье [1]. В нашей работе мы исследовали слабую ошибку аппроксимации для схемы Эйлера в случае вырожденных диффузий по типу Колмогорова, для негладких коэффициентов. Вырожденные диффузии вида

$$\begin{cases} dX_t = x + b(X_t, Y_t)dt + \sigma(X_t, Y_t)dW_t, \\ dY_t = y + X_t dt, t \in [0, T], \end{cases} \tag{1}$$

где $b : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d, \sigma : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, W - Броуновское движение на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, $T > 0$ -фиксированный временной интервал, были впервые рассмотрены в работе А.Н. Колмогорова [3].

Данная модель может быть использована на практике как для предсказания цены опциона, так и для расчетов в Гамильтоновой механике (подробнее в работах [2,5]).

Особенность данной системы состоит в том, что вторая компонента не содержит случайности. Такая вырожденность системы, в свою очередь, влечет и перенос начального условия первой компоненты уравнения на вторую компоненту. Несмотря на указанные сложности, метод параметрикса, впервые адаптированный для вырожденного случая в работе [4], позволяет получить оценки типа Аронсона для переходной плотности решения стохастического дифференциального уравнения даже в случае, когда коэффициенты исходного уравнения лишь ограничены, измеримы и непрерывны по Гельдеру (рассмотрен случай однородных по времени коэффициентов).

В нашей работе в указанных предположениях удается получить оценку на слабую ошибку схемы Эйлера:

$$\mathcal{E}(f, (x, y), T, h) := \mathbb{E}[f(X_T^h, Y_T^h)] - \mathbb{E}[f(X_T, Y_T)] \leq Ch^{\gamma/2}(1 + |x|^{\gamma/2}).$$

где коэффициенты b, σ - непрерывны по Гельдеру с коэффициентами $\gamma, \gamma/2$ по первой и второй переменной соответственно, а тестовые функции f непрерывны по Гельдеру с коэффициентами β, $\beta/2$ по первой и второй переменной соответственно для $\beta \in (0, 1]$.

В данной работе также получена оценка глобальной ошибки аппроксимации - разницы переходных плотностей исходного процесса и его схемы Эйлера. В случае показателя Гельдера $\gamma > \frac{1}{2}$ удается доказать оценку: для всех t на решетке по времени $\Lambda_h := \{(t_i)_{i \in [1,N]}\}$ и $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2d}$ существуют константы $C := (T, b, a, \beta), c > 0$ такие, что:

$$|p(t, (x, y), (x', y')) - p_h(t, (x, y), (x', y')| <\leq Ch^{\beta}(1 + (|x| \wedge |x'|))^{1+\gamma}) \sup_{s \in [t-h, t]} p_{c,K}(s, (x, y), (x', y')),$$

где $p_{c,K}(t, (x, y), (x', y')) := \frac{c^d 3^{d/2}}{(2\pi t^2)^d} \exp\left(-c\left[\frac{|x'-x|^2}{4t} + 3\frac{|y'-y-(x+x')t/2|^2}{t^3}\right]\right)$, и $\beta \in (0, \gamma - \frac{1}{2})$.

Источники и литература

1) Мильштейн Г. Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее примен. 19:3, 1974. С. 583–588.
2) E. Barucci, S. Polidoro and V. Vespri. Some results on partial differential equations and Asian options // Math. Models Methods Appl. Sci. 3. 2001. P. 475–497.
3) Kolmogorov A.N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. of Math. 35. 1934. P. 116-11.
4) Konakov V., Menozzi S. and Molchanov S. Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 46. 2010. P. 908-923.
5) Mattingly J. and Stuart A. Geometric ergodicity of some hypo-elliptic diffusions for particle motions. Inhomogeneous random systems // Markov Process. Related Fields, 8. 2004. P. 199–214.