Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Справедливые раскраски гиперграфов в r цветов

Научный руководитель – Шабанов Дмитрий Александрович

Ахмеджанова Маргарита
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: mechmathrita@gmail.com

В работе рассматривается известная задача экстремальной комбинаторики, связанная с раскрасками гиперграфов.

Дадим основные определения из теории гиперграфов. Гиперграфом называется пара $H=(V,E)$, где $V=V(H)$ – некоторое множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а $E=E(H)$ – произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых ребрами гиперграфа. Гиперграф является n-однородным, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H=(V,E)$ называется правильной, если в этой раскраске все ребра из E не являются одноцветными. Если для гиперграфа H существует правильная раскраска в r цветов, то говорят, что H является r-раскрашиваемым.

А.Косточка [1] доказал следующую теорему: если $r<\sqrt{\frac{1}{8}\ln\frac{ln}{2}}$ и число ребер n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$|E|\leq e^{-4r^2}\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor log_2(r)/\log_2(r)+1\rfloor} r^n,$$

то H является r-раскрашиваемым.

Правильные раскраски допускают различные обобщения, одним из которых являются справедливые раскраски. Раскраска множества вершин гиперграфа называется *справедливой* (в мировой литературе используется термин *equitable*), если она является правильной и при этом мощности всех цветовых классов отличаются не более, чем на единицу.

Наш результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $H=(V,E)$ произвольный n–однородный гиперграф с условием*

$$|E|\leq c\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor\log_2(r)/\log_2(r)+1\rfloor} r^{n-1}.$$

где $c>0$ — некоторая абсолютная константа, а $r<n$, тогда для H существует справедливая раскраска в r цветов.

Таким образом, любой n-однородный гиперграф с ограниченным числом ребер допускает не только правильную раскраску в r цветов, но и справедливую.

Источники и литература

1) A. Kostochka, Coloring uniform hypergraphs with few colors, Random Structures and Algorithms, 24, 1, 2004, 1–10