Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вероятность достаточно долгого пребывания капитала выше нуля до парижского разорения в модели Крамера-Лундберга

Научный руководитель – Булинская Екатерина Вадимовна

Шигида Борис Игоревич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: borshigida@gmail.com

В известной модели Крамера-Лундберга с экспоненциальными выплатами капитал страховой компании в зависимости от непрерывного времени моделируется случайным процессом

$$X_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n,$$

где $x \geqslant 0$ — начальный капитал, $c > 0$ — скорость поступления премий, N_t — стандартный пуассоновский процесс с интенсивностью λ, Y_n — независимые экспоненциально распределённые случайные величины с параметром α, независимые с процессом N_t.

В этой модели рассмотрим случайную величину η_l^X — первый момент времени, когда капитал продержался выше нуля в течение промежутка времени l без перерыва, τ_d^X — момент парижского разорения, то есть первый момент, когда, наоборот, капитал компании продержался ниже нуля в течение промежутка d. В работе [1] рассматривается вероятность $\mathsf{P}\left(\tau_d^X < \infty\right)$. Мы же аналогичными методами рассматриваем $\mathsf{P}\left(\eta_l^X < \tau_d^X\right)$ как функцию от параметров $\lambda, c, \alpha, x, d, l$.

Выведена явная формула, выражающая эту функцию через параметры. Она имеет вид

$$\mathsf{P}\left(\tau_d^X > \eta_l^X\right) = \bar{G}_{12}(l) + \frac{G_{12}(l)P_{21}(d)\bar{P}_{12}(l)}{1 - P_{21}(d)P_{12}(l)},$$

где

$$g_{12}(t) = \frac{\lambda e^{-\alpha x} e^{-(c\alpha+\lambda)t}}{ct+x} \left(xI_0\left(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{ct}{\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}} I_1\left(2\sqrt{\alpha\lambda t(ct+x)}\right)\right), \quad t \geqslant 0,$$
$$G_{12}(l) = \int_0^l g_{12}(t)\, dt, \quad \bar{G}_{12}(l) = 1 - G_{12}(l),$$
$$P_{12}(l) = \sqrt{\frac{\lambda}{c\alpha}} \int_0^l e^{-(\lambda+c\alpha)t} t^{-1} I_1\left(2t\sqrt{\lambda c\alpha}\right) dt, \quad \bar{P}_{12}(l) = 1 - P_{12}(l),$$
$$P_{21}(d) = \sqrt{\frac{c\alpha}{\lambda}} \int_0^d e^{-(\lambda+c\alpha)t} t^{-1} I_1\left(2t\sqrt{\lambda c\alpha}\right) dt,$$

I_ν — модифицированная функция Бесселя.

Произведён анализ чувствительности этой функции от параметров, а именно:

- Построены случайные выборки параметров и исследованы графики, показывающие зависимость результата от параметров из данных выборок, с помощью графиков сделаны выводы о том, насколько чувствительна функция по отношению к изменению параметров.

- С помощью алгоритма из [2] посчитаны численные значения показателей чувствительности Соболя первого порядка на случайных выборках параметров, а также показатели полного эффекта.

Источники и литература

1) A. Dassios and Sh. Wu, Parisian ruin with exponential claims (July 1, 2008), available at http://stats.lse.ac.uk/angelos/docs/exponentialjump.pdf .
2) A. Saltelli, M. Ratto, T. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola, Global Sensitivity Analysis. The Primer, Wiley, 2008.