Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Аппроксимация экспоненциального закона с помощью метода Стейна

Научный руководитель – Булинский Александр Вадимович

Слепов Николай Алексеевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: naslepov@mail.ru

Одним из важных подходов к доказательству предельных теорем методом Стейна является использование преобразования нулевого смещения, введённого в [1] для случая нормальной аппроксимации изучаемого закона. Похожая техника была развита в [3] для приближений экспоненциальным распределением, а вскоре появился и ее дискретный аналог [4].

В основе подхода [3] лежит рассмотрение распределения случайной величины X^e, являющейся результатом аналога преобразования нулевого смещения аппроксимируемой величины X. Пара таких величин удовлетворяет некоторому уравнению смещения на заданном классе функций f, и если $Law(X) = Law(X^e)$, то X имеет показательное распределение.

При использовании данного подхода сравниваемая с экспоненциальной случайная величина X должна быть неотрицательна. В противном случае парная величина X^e может не существовать. В то же время, согласно [2] (глава 5, §6) экспоненциальная аппроксимация возможна для величин, которые могут быть отрицательными с положительной вероятностью. Поэтому мы отказались от упомянутого вспомогательного подхода и предложили исследовать лежащее в основе преобразования смещения уравнение Стейна для получения аналога известной теоремы Реньи.

Теорема 1. *Пусть $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность m-зависимых случайных величин с $\mathbb{E}Y_i = \frac{1}{\lambda}$ и $supp(Y_i) \subset [a, b]$. Предположим, что независимые от $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ величины N_p имеют геометрические распределения с параметром $p > 0$. Тогда для функций распределения F_{W_p} и F_Z величин $W_p = \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{N_p} Y_i$ и $Z \sim Exp(\lambda)$ при достаточно малых p выполнено соотношение*

$$|F_{W_p}(x) - F_Z(x)| \le C_{loc}(x, \lambda, a, b)\sqrt{p}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где C_{loc} не зависит от p. Кроме того, для метрики Колмогорова d_K имеем

$$d_K(Law(W_p), Law(Z)) = O\Big(\sqrt{p \log 1/p}\Big), \quad p \to 0. \tag{1}$$

Оценка (1) отличается от результата Следствия 3.1 [3] корнем из логарифмического множителя. Однако она позволяет рассматривать последовательности $m-$зависимых величин, которые могут быть отрицательны с ненулевой вероятностью.

Источники и литература

1) Goldstein L., Reinert G. Stein's method and the zero bias transformation with application to simple random sampling. // The Annals of Applied Probability. 1997. 7(4), 935–952.
2) Kalashnikov V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. Risk Analysis, Reliability, Queueing. Kluwer, Dordrecht, 1997.
3) Peköz E., Röllin A. New rates for exponential approximation and the theorems of Renyi and Yaglom. // Annals of Probability. 2011. 39, 587-608.
4) Peköz E., Röllin A, Ross N. Total variation error bounds for geometric approximation. // Bernoulli. 2013. 19(2), 610–632.