Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Некоторые результаты о локальных преобразованиях графов для задачи о вершинной k-раскраске

Сироткин Дмитрий Валерьевич
Студент (магистр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» - Нижний Новгород, Нижний Новгород, Россия
E-mail: dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

Преобразования графов часто используются для исследования вычислительной сложности (доказательства NP-полноты и построения полиномиальных алгоритмов) задач на графах в различных классах графов. Например, для *задачи о независимом множестве* (т. е. задачи вычисления в заданном графе *числа независимости* — размера наибольшего подмножества попарно несмежных его вершин) двойное подразбиение ребра увеличивает число независимости на единицу [1]. Удаление из графа вершины степени два и отождествление её соседей уменьшает число независимости на единицу [1]. Если замкнутая окрестность вершины b включает замкнутую окрестность вершины a, то удаление a из графа сохраняет его число независимости [2]. Смежностное поглощение является частным представителем так называемых *сжатий* [2], т. е. отображений множества вершин графа в себя, не являющихся автоморфизмами, при которых любые две различные несмежные вершины переходят в различные несмежные вершины. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порождённый подграф, при этом, очевидно, сохраняется число независимости. Мы рассматриваем некоторый класс локальных преобразований графов, которые были введены в работе [3].

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порождённый подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовём *H-отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$. Пусть граф G содержит порождённый подграф G_1 с G_1-отделяющим множеством A, G_2 — граф, для которого $A \subseteq V(G_2)$. Мы называем *заменой* G_1 на G_2 в графе G образование графа с множеством вершин $(V(G) \setminus V(G_1)) \cup V(G_2)$ и множеством рёбер $(E(G) \setminus E(G_1)) \cup E(G_2)$.

Локальные преобразования графов, описанные выше, ранее рассматривались только для задачи о независимом множестве (см. работу [3]). Здесь же мы их рассматриваем применительно к задаче о вершинной k-раскраске.

Для заданного графа G отображение $c : V(G) \longrightarrow \overline{1,k}$ называется *вершинной k-раскраской*, если $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любого $(v_1, v_2) \in E(G)$. Граф называется *k-раскрашиваемым*, если он имеет вершинную k-раскраску. *Задача о вершинной k-раскраске* для заданного графа состоит в том, чтобы определить, является ли он k-раскрашиваемым или нет.

Будем говорить, что графы H_1 и H_2 являются *(χ, k)-подобными относительно* $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$, если для любых вершинных k-раскрасок c_1 и c_2, соответственно, графов H_1 и H_2 существуют вершинные k-раскраски c'' и c', соответственно, графов H_2 и H_1 такие, что для любой вершины $v \in A$ справедливы равенства $c_1(v) = c''(v)$ и $c_2(v) = c'(v)$. Несложно доказать, что если граф $H^*_{(\chi,k)}$ — результат замены H_1 на H_2 в графе H, то граф H является k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $H^*_{(\chi,k)}$.

Для заданных графа G и подмножества $A \subseteq V(G)$ определим множество $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A)$ следующим образом. Оно состоит из всевозможных разбиений подмножества A на не более чем k непустых частей, каждое из которых *не продолжается* до некоторой k-раскраски G. Очевидно, что графы H_1 и H_2 являются (χ, k)-подобными относительно $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H_1, A) = \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H_2, A)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема:

Теорема 1.

Для произвольного семейства ϱ, состоящего из m попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем $k \geq 3$ непустых частей, существуют граф G и подмножество вершин $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$. При этом количество вершин в графе G может быть оценено сверху как $O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.

Источники и литература

1) Алексеев В. Е. О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. 1982. С. 3–13.

2) Алексеев В. Е. О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 36. С. 23–31.

3) Алексеев В. Е., Лозин В. В. О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискретный анализ и исследование операций. 1998. Т. 5, №1. С. 3–19.