Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Многомерные всплески Хаара: классификация и гладкость

Научный руководитель – Протасов Владимир Юрьевич

Зайцева Татьяна Ивановна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: zaitsevatanja@gmail.com

Ежедневно мы сталкиваемся с задачей хранить большие наборы чисел – фотографии, аудио и видео. Один из эффективных способов делать это – использовать системы всплесков. Первая система всплесков была изобретёна в начале XX века венгерским математиком Альфредом Хааром. Она состоит из кусочно-постоянных функций, являющихся базисом в $L_2(\mathbb{R})$.

Позже были придуманы и другие системы всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, а также появились многомерные аналоги систем Хаара. Классическая система Хаара на прямой порождена *масштабирующей функцией Хаара* – индикаторной функцией отрезка $[0,1]$ и её двоичными сжатиями. Оказывается, что аналогом отрезка в многомерном случае являются специальные компакты, называемые тайлами (tiles), а аналогом двоичных сжатий – умножения на сжимающую матрицу M^{-1}. Тайл G обладает следующими свойствами:
1) (самоподобие) $G = \bigcup\limits_{d\in D} M^{-1}(G+d)$, где D – конечное множество целочисленных векторов ("цифр");
2) (разбиение единицы) все целочисленные сдвиги множества G составляют покрытие $\mathbb{R}^n$ без пересечений (точнее, мера попарных пересечений равна нулю).

Конечно, можно получать многомерные функции Хаара в качестве прямых произведений одномерных. Однако, с точки зрения теории всплесков, такие системы имеют плохую локализацию и потому неэффективны в задачах обработки сигналов. Наиболее интересные системы всплесков не являются прямыми произведениями одномерных.

Одно из интересных приложений всплесков – геометрическое моделирование поверхностей. С теорией всплесков тесно связаны subdivision schemes (подразделяющие схемы), позволяющие эффективно приближать функции и поверхности. Это свойство используется, например, при моделировании персонажей мультфильмов. Скорость приближения определяется важным параметром *гладкости* тайлов, нахождение которого представляет собой нетривиальную задачу. Доклад будет посвящён тому, как связаны эти теории и какие бывают тайлы и их гладкость.

Источники и литература

1) K. Grochenig, W.R. Madych, Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of $\mathbb{R}^n$, IEEE Trans. Inform. Theory, 38 (1992), 556 – 568.
2) J. Lagarias and Y.Wang, Integral self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. II. Lattice tilings, J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), 83 – 102.