Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Короткие единичные диагностические тесты для схем из функциональных элементов

Научный руководитель – Редькин Николай Петрович

Попков Кирилл Андреевич
Кандидат наук
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия
E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Представим, что под воздействием некоторого источника неисправностей один вход или выход произвольного элемента схемы S может перейти в неисправное состояние. В результате данная схема вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$ называются *функциями неисправности* схемы S.

Введём следующие определения [1–3]. *Единичным проверяющим тестом* (ЕПТ) для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Единичным диагностическим тестом* (ЕДТ) для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является ЕПТ и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. Указанные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* (см. [3, с. 110–111]), т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

В качестве тривиального ЕДТ (и ЕПТ) длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n.

Пусть зафиксированы вид неисправностей элементов, а также функционально полный базис B, и пусть T — ЕДТ для некоторой схемы S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берётся по всем ЕДТ T для схемы S; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D(f)$. Функция $D(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕДТ.

Содержательный смысл функций $D(f)$, $D(n)$ заключается в том, что первая из них определяет минимально возможную длину ЕДТ при реализации функции f неизбыточными схемами из функциональных элементов в базисе B, а вторая — минимально возможную длину ЕДТ при реализации такими схемами «самой труднотестируемой» булевой функции от n переменных.

Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными и/или инверсными неисправностями на выходах и/или выходах элементов. Константная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом его входе (на его выходе) становится равно некоторой булевой константе.

Неисправности на входах и/или выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного входа/выхода элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного входа/выхода элемента независимо от неисправностей других входов/выходов элементов. Инверсная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом его входе (на его выходе) становится противоположным значению на этом же его входе (на его выходе) в случае, когда данный элемент исправен.

В работах [4–6] получены верхние оценки, в работе [7] — нижние оценки, а в работах [8–14] найдены точные значения функции $D(n)$ в некоторых полных базисах при некоторых неисправностях функциональных элементов.

Пусть M — произвольное множество двоичных наборов длины n. Через $I_M(\tilde{x}^n)$ будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборах из множества M и значение 0 на всех остальных наборах.

Два двоичных набора одинаковой длины называются *соседними*, если они различаются ровно в одной компоненте.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция, T — множество (некоторых) двоичных наборов длины n, $\alpha \in \{0,1\}$. Будем говорить, что функция f *обладает* (T,α)*-свойством*, если существует двоичный набор длины n, не принадлежащий множеству T, на котором данная функция принимает значение α.

Представим, что зафиксированы вид неисправностей функциональных элементов: константные (однотипные типа $p \in \{0,1\}$ либо произвольные) и/или инверсные неисправности на входах и/или выходах элементов, а также функционально полный базис B. Нижеследующая теорема даёт способ получения верхних оценок функций $D(f)$, $D(n)$ на основании существования коротких ЕПТ для схем в базисе B при таких же неисправностях элементов.

Теорема 1. *Пусть для неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ существуют такие $m \in \mathbb{N}$, двоичные наборы $\tilde{c}_1 = (c_{1,1},\dots,c_{1,m})$, $\tilde{c}_0 = (c_{0,1},\dots,c_{0,m})$, булева функция $\varphi(\tilde{x}^m)$, множество $T = \{\tilde{\sigma}_1,\dots,\tilde{\sigma}_l\}$ двоичных наборов длины n, где $|T| < 2^n$; подмножества $M_1,\dots,M_m$ множества T и двоичные наборы $\tilde{\pi}_1,\dots,\tilde{\pi}_l$ длины m, что выполнены следующие условия:*

1) *для любого $i \in \{1,\dots,m\}$ функцию $f_i(\tilde{x}^n) = (c_{1,i}f \oplus c_{0,i}\overline{f} \oplus I_{M_i})(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой S_i в базисе B, для которой множество T является ЕПТ;*

2) *$\tilde{\pi}_j = (f_1(\tilde{\sigma}_j),\dots,f_m(\tilde{\sigma}_j))$ для любого $j \in \{1,\dots,l\}$;*

3) *функцию $\varphi(\tilde{x}^m)$ можно реализовать схемой S_φ в базисе B, неизбыточной и допускающей ЕПТ T_φ относительно неисправностей рассматриваемого вида, кроме, быть может, константных неисправностей на выходе выходного элемента схемы, где*

$$T_\varphi = \begin{cases} \{\tilde{\pi}_1,\dots,\tilde{\pi}_l,\tilde{c}_a\}, & \text{если функция } f \text{ не обладает } (T,\overline{a})\text{-свойством} \\ & \text{для некоторого } a \in \{0,1\}, \\ \{\tilde{\pi}_1,\dots,\tilde{\pi}_l,\tilde{c}_1,\tilde{c}_0\} & \text{иначе;} \end{cases}$$

4) *функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение α на наборе $\tilde{c}_\alpha$ и всех соседних с ним наборах для любого $\alpha \in \{0,1\}$ такого, что функция f обладает (T,α)-свойством;*

5) *функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение $f(\tilde{\sigma}_j)$ на наборе $\tilde{\pi}_j$ и значение $\overline{f}(\tilde{\sigma}_j)$ на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_j$, для любого $j \in \{1,\dots,l\}$.*

Тогда

$$D(f) \leqslant \begin{cases} |T|+1, & \text{если функция } f \text{ не обладает } (T,\overline{a})\text{-свойством} \\ & \text{для некоторого } a \in \{0,1\}, \\ |T|+2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Идея доказательства теоремы 1 состоит в построении схемы S из подсхем $S_1, \dots, S_m, S_\varphi$ и доказательстве того, что данная схема реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, неизбыточна и допускает ЕДТ длины не более $|T|+1$ либо не более $|T|+2$ в зависимости от того, какой из двух случаев в утверждении теоремы имеет место; именно установление этих фактов представляет основную трудность. Сама же схема S строится следующим несложным образом: входы схемы S_φ соединяются с выходами схем $S_1, \dots, S_m$ (1-й вход — с выходом схемы S_1, $\dots$, m-й вход — с выходом схемы S_m); полученная схема с n входами, на которые подаются переменные $x_1, \dots, x_n$, и выходом, совпадающим с выходом схемы S_φ, и объявляется схемой S.

Теоремы 2–6, сформулированные ниже, доказываются с помощью теоремы 1 и известных верхних оценок длин минимальных ЕПТ для схем из функциональных элементов в некоторых базисах при некоторых неисправностях элементов.

Рассмотрим в качестве базиса множество $\{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3, \overline{x}\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа 0 на входах и выходах элементов.

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D(n) \leqslant 3$.*

Рассмотрим базис Жегалкина $\{\&, \oplus, 1\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа 1 на выходах элементов.

Теорема 3. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D(n) \leqslant 3$.*

Рассмотрим в качестве базиса множество $\{\eta(\tilde{x}^4), x_1 \sim x_2, \overline{x}, 0\}$, где $\eta(\tilde{x}^4)$ — произвольная несамодвойственная булева функция, принимающая значение α на наборе $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ и значение $\overline{\alpha}$ на всех соседних с ним наборах для любого $\alpha \in \{0,1\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на входах и выходах элементов.

Теорема 4. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D(n) \leqslant 4$.*

Рассмотрим в качестве базиса множество $\{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на выходах элементов.

Теорема 5. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D(n) \leqslant 4$.*

Рассмотрим базис Жегалкина $\{\&, \oplus, 1\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — инверсные неисправности на входах и выходах элементов.

Теорема 6. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D(n) \leqslant 3$.*

Таким образом, получен ряд новых константных верхних оценок функции $D(n)$ в различных полных базисах при различных неисправностях функциональных элементов. Тем самым установлена возможность реализации любых булевых функций схемами в этих базисах, допускающими ЕДТ константной длины при соответствующих неисправностях элементов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №18-01-00337 «Проблемы синтеза, сложности и надежности в теории управляющих систем»).

Источники и литература

1) Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: Изд-во МГУ. — 1986. — С. 7–12.
2) Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.
3) Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.
4) Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.
5) Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих короткие единичные диагностические тесты при константных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 2. — С. 87–102.
6) Любич И. Г., Романов Д. С. О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над некоторыми базисами // Прикладная математика и информатика. Вып. 58. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 47–61.
7) Попков К. А. Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, вып. 2. — С. 53–69.
8) Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 4. — С. 38–54.
9) Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 3. — С. 3–18.
10) Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины два // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 3. — С. 56–72.
11) Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 80–103.
12) Попков К. А. Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, вып. 3. — С. 99–116.
13) Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2018. — Т. 23, вып. 3. — С. 131–147.
14) Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 149. — 32 с.