Существование предельного цикла в распределенной модели гиперциклической репликации

Чмерева Ольга Сергеевна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: o.s.ch@yandex.ru

Научный руководитель *— Братусь Александр Сергеевич*

В теории предбиологической эволюции широко распространена классическая дискретная модель гиперциклической репликации, описанная в 1971 году М. Эйгеном и П. Шустером в [1].

Для данной модели существуют различные модификации, одна из которых, пространственно распределенная модель с учётом глобальных ограничений на число макромолекул в системе, детально исследована в [2].

В текущей работе рассматривается задача о распространении дискретной модели гиперциклической репликации на систему, состоящую из бесконечного числа элементов, между которыми могут возникать мутации, способствующие выравниванию структуры макромолекул.

Для нахождения концентрации $u(x,t)$ макромолекул x гиперцикла в момент времени t была построена модель (1), состоящая из интегро–дифференциального уравнения с запаздыванием по пространственной переменной, рассматриваемого на интегральном симплексе.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u(x,t)\left(k(x)u(x-\tau,t) - f(t)\right) + d\,\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ f(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} k(x)u(x,t)u(x-\tau,t)\,dx, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} u(x,t)\,dx = 1, \qquad k(x+2\pi) = k(x), \\ u(0,t) = u(2\pi,t), \qquad \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(2\pi,t)}{\partial x}, \\ u(x-\tau,t) = \begin{cases} u(x-\tau,t), & \text{если } x-\tau \geqslant 0; \\ u(2\pi+(x-\tau),t), & \text{если } x-\tau < 0; \end{cases} \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Концентрация макромолекул $u(x,t)$ рассматривается на отрезке $\Omega = [0,\, 2\pi]$, а поведение системы изучается с течением времени $t \geqslant 0$.

Функция $u(x-\tau,t)$ отражает влияние предшествующих макромолекул гиперцикла на текущую макромолекулу, коэффициент $k(x)$ определяет скорость репликации, а функция $f(t)$ описывает среднюю приспособленность (средний фитнес) всей системы в интегральной форме.

На функцию $u(x,t)$ и начальное условие $\varphi(x)$ накладываются дополнительные условия периодичности, являющиеся аналогом цикличности и замкнутости классической дискретной модели.

Мутации макромолекул описываются введением в модель однородной диффузии, задающейся оператором Лапласа с некоторым нормированным коэффициентом d.

Для построенной модели (1) были получены следующие теоретические и численные результаты:

1. доказана локальная разрешимость распределенной континуальной модели гиперциклической репликации для функций $u(x,t)$ из классов $C^3[0,2\pi]$ по x и $C^1[0,+\infty)$ по t;
2. исследована устойчивость пространственно однородных и пространственно неоднородных положений равновесия;
3. доказано существование предельного цикла в стационарном положении равновесия распределенной континуальной модели гиперциклической репликации;
4. построен алгоритм, численно моделирующий задачу и позволяющий провести исследование поведения системы при различных значениях параметров и начальных условий;
5. проведён анализ и сравнительная характеристика результатов для двух моделей: нераспределенной континуальной модели и построенной модели с учетом диффузии макромолекул.

Литература

1. Эйген М., Шустер П. Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. М.: Мир, 1982.
2. Bratus A. S., Posvyanskii V. P., Novozhilov A. S. Existence and stability of stationary solutions to spatially extended autocatalityc and hyper cyclic systems under global regulation and with nonlinear growth rates // Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, Vol. 11, № 3, P. 1897—1917.