Рандомизированный алгоритм спектрального разрежения графов

Михайлов Арсений Денисович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `sarasderas@gmail.com`

***Научный руководитель** — Тыртышников Евгений Евгеньевич*

Разрежение графа - процесс приближения исходного графа графом с меньшим числом вершин и сохранением некоторых свойств. Эта задача широко используется в различных областях, таких как физика, машинное обучение, дискретная математика и так далее. Соответственно и слово «приближение» может пониматься совершенно по-разному, в зависимости от изначальной постановки задачи.

Для решения проблем в области линейной алгебры и спектральной теории графов вводится понятие спектрального разрежения:

Пусть имеется простой взвешенный граф $G = (V, E, w)$, $|V| = n$, $|E| = m$, $w_{(u,v)}$ – вес ребра $(u, v) \in G$. Лапласианом графа G называется:

$$L \in \mathbb{R}^{n\times n},\ L = D - A, \tag{1}$$

где A - взвешенная матрица смежности G, D - диагональная матрица: $D(v, v) = \sum_z w_{(v,z)},\ z \in G$ (если ребро (v, z) отсутсвует, то его вес полагается равным 0).

Пусть $H = (V, \widetilde{E}, \widetilde{w})$ - подграф G, $|\widetilde{E}| = \widetilde{m}$, и его Лапласиан - $\widetilde{L}$. Тогда H является *спектральным разрежителем* G (с точностью $\varepsilon > 0$), если $\widetilde{m} < m$ и:

$$(1-\varepsilon)x^T Lx \le x^T \widetilde{L}x \le (1+\varepsilon)x^T Lx,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Причём чем меньше $\widetilde{m}$, тем лучше.

Ориентируем все ребра графа G произвольным образом. Тогда можно составить его матрицу инцидентности:

$$B(e, v) = \begin{cases} 1,\ \text{если } v \text{ - начало } e \\ -1,\ \text{если } v \text{ - конец } e \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases} \tag{3}$$

Так же введём диагональную весовую матрицу $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $W(e,e) = w_e$. Существует представление Лапласиана:

$$L = B^T W B = B^T W^{1/2} W^{1/2} B \tag{4}$$

На основе алгорима RowSampleL2 из [1], был построен алгоритм спектрального разрежения графов:

Algorithm 1: GSS$(G(V, E, w), \varepsilon)$

Построение $B(e, v)$
Построение $W(e, e)$
$C = W^{1/2} B$
Выбор констант c, θ
$R = d^{\theta}$
$D =$ **RowSampleL2**(C, R, ε)
return $D^T D$

Также была сформулирована и доказана теорема, гарантирующая работу алгоритма:

Теорема 1. $\widetilde{L} =$ ***GSS***$(G(V, E, w), \varepsilon)$ *с вероятностью* $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ *является спектральным разрежителем графа* G *с точностью* ε, *и имеет* $O(nlogn\varepsilon^{-2})$ *рёбер. Асимптотика алгоритма:* $O(n^3\varepsilon^{-2}) \approx O(m\sqrt{m}\varepsilon^{-2})$.

Было проведено сравнение **GSS** с алгоритмом **Sparsify** из [2] (один из лучших алгоритмов в области). Результаты сравнения приведены в таблице:

Алгоритм	Время	Ребра	p	ε
Sparsify	$\widetilde{O}(m\varepsilon^{-2})$	$9C^2 nlogn\varepsilon^{-2}$	$1/2$	$(1/\sqrt{n};\ 1]$
GSS	$\widetilde{O}(m\sqrt{m}\varepsilon^{-2})$	$O(nlogn\varepsilon^{-2})$	$1 - \sqrt{n}^{-1}$	$(0,\ \infty)$

Литература

1. Mu Li, Gary L. Miller, Richard Peng. Iterative Row Sampling. April 5, 2013. [arXiv:1211.2713v2]
2. Daniel A. Spielman and Nikhil Srivastava. Graph sparsification by effective resistances. Proceedings of the 40th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pages 563–568, 2008