Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Прямые и обратные теоремы вложения разных измерений для одного класса мультианизотропных пространств Соболева

Научный руководитель – Маргарян Вачаган Николаевич

Хачатурян Микаел Артурович

Студент (магистр)

Российско-Армянский (Славянский) университет, Институт математики и высоких технологий, Ереван, Армения

E-mail: khmikayel@gmail.com

В данной работе получены теоремы вложения разных измерений [1] для функций из мультианизотропного пространства Соболева $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ в случае одного класса вполне правильных многогранников $\mathfrak{N}$ [2].

Пусть $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ n-мерное евклидовое пространство, $\mathbb{Q}_+^n$ – множество n-мерных векторов с положительными рациональными компонентами, $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n-мерных мультииндексов. $D_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(k = 1, 2, \ldots, n)$, $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$ – обобщенная производная по Соболеву порядка $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Q}_+^n$ обозначим $\xi^t = (\xi_1^t, \ldots, \xi_n^t)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$. При $n = 2, 3$ рассмотрим вполне правильный многогранник $\mathfrak{N}$ с главными вершинами $\alpha^{(k)} \in \mathbb{Q}_+^n (k = 1, \cdots, M)$ [2]. Для $\forall m \in \mathbb{Q}_+$, обозначим через $m\mathfrak{N}$ вполне правильный многогранник с главными вершинами $m\alpha^{(k)} (k = 1, 2, \cdots, M)$. Обозначим $P_{\mathfrak{N}}(\xi) := 1 + \sum_{k=1}^M (\xi^2)^{\alpha^{(k)}}$, $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) := \{u : u \in L_2(\mathbb{R}^n), \sqrt{P_{\mathfrak{N}}(\xi)} F[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$ – мультианозотропное пространство Соболева с нормой $\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)} = \|\sqrt{P_{\mathfrak{N}}} F[u]\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$, где $F[u](\xi)$ есть преобразование Фурье функции u.

Рассмотрим вполне правильный многогранник $\mathfrak{N}$ с вершинами из $\mathbb{Z}_+^3$. Обозначим через $\mathfrak{N}_0$ его двухмерную грань в гиперплоскости $\{x_3 = 0\}$. Предположим $\mathfrak{N}$ – пирамида с основаноием $\mathfrak{N}_0$ и с вершиной $\alpha^{(M)} = (0, 0, l)$.

Теорема 1. *Пусть $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ и s целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \le s < l$. Тогда для каждого $a \in \mathbb{R}$, если обозначить через $\mathfrak{A}$ множество всех тех ε, для которых $D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a+\varepsilon} \in W_2^{(1-\frac{s}{l}-\frac{1}{2l})\mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)$, то существует функция $\varphi_s \in W_2^{(1-\frac{s}{l}-\frac{1}{2l})\mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)$, такая, что выполняются следующие соотношения*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\in\mathfrak{A}}} \left\| D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a+\varepsilon} - \varphi_s \right\|_{W_2^{(1-\frac{s}{l}-\frac{1}{2l})\mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)} = 0, \tag{1}$$

$$\|\varphi_s\|_{W_2^{(1-\frac{s}{l}-\frac{1}{2l})\mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)} \le c\|f\|_{W_2^{(l,\mathfrak{N}_0)}(\mathbb{R}^3)}, \tag{2}$$

где $c > 0$ константа независящая от функции f и числа a.

Теорем 2. *Для любого заданного набора функций $\varphi_s \subset W_2^{(1-\frac{s}{l}-\frac{1}{2l})\mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)$, где $s = 0, 1, \ldots, l-1$, существует функция $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющая следующим свойствам.*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\| D_{x_3}^s f\big|_{x_3=\varepsilon} - \varphi_s \right\|_{W_2^{(1-\frac{s}{l}-\frac{1}{2l})\mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)} = 0, \ \text{для } \forall s = 0, 1 \ldots, l-1, \tag{3}$$

$$\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \le c \sum_{s=0}^{l-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{(1-\frac{s}{l}-\frac{1}{2l})\mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)}, \tag{4}$$

где $c > 0$ константа независящая от функций $\{\varphi_s\}$.

Источники и литература

1) Г.В. Демиденко. Пространства Соболева и обобщенные решения. Учебное пособие. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
2) Г. А. Карапетян. *Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности.* Сиб. мат журнал. 2017. Т. 58, № 3. С. 573-590.