

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об одной модели дивергенции крыла в теории упругой устойчивости

Научный руководитель – Куликов Анатолий Николаевич

Запов Александр Сергеевич

Аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: yar.promo.zarov.a@gmail.com

В работе рассматривается следующая краевая задача для нелинейного эволюционного уравнения гиперболического типа:

$$u_{tt} + gu_t = u_{xx} + au + ac_2u^2 + ac_3u^3, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad (2)$$

где $a \geq 0, c_2, c_3 > 0$, а $x \in [0, \pi]$. Краевая задача (1), (2) описывает крутильные колебания крыла в сверхзвуковом потоке газа. Уравнение (1) получено из классического уравнения В.В. Болотина (см. [1], [2]) после перенормирования.

Для изучения вопроса об устойчивости нулевого состояния равновесия КЗ (1), (2) в линейном приближении рассмотрим следующую КЗ:

$$u_{tt} + gu_t = Au, \quad (3)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad (4)$$

где $A(a)v = v'' + av$ на достаточно гладких функциях $v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям $v(0) = v(\pi) = 0$.

Теорема 1. *Решения КЗ (3), (4), а также нулевое решение исходной КЗ асимптотически устойчиво в случае, если $a < 1$. При $a > 1$ нулевое решение КЗ (1), (2) неустойчиво, при $a = a_0 = 1$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости.*

Решения задачи (1), (2) из окрестности состояния равновесия $u \equiv 0$ будем искать в виде: $u(x, z, \varepsilon) = \varepsilon u_1(x, z) + \varepsilon^2 u_2(x, z) + O(\varepsilon^3)$, где $z = z(s), s = \varepsilon t, u_1 = z \sin(x)$. Для определения $u_2 = u_2(x, z)$ получаем линейную неоднородную краевую задачу:

$$g\Psi'_0 z \sin(x) = u_{2xx} + u_2 + \gamma u_1 + u_1^2 c_2, \quad (5)$$

$$u_2(0, z) = u_2(\pi, z) = 0. \quad (6)$$

Теорема 2. *Пусть $a = 1 + \gamma\varepsilon$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состоянию равновесия нормальной формы, полученной из КЗ (5), (6), соответствует нетривиальное состояние равновесия краевой задачи (1), (2) $S(\varepsilon)$:*

$$u(x, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\gamma}{l} \sin(x) + O(\varepsilon^2).$$

Источники и литература

- 1) Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматлит, М., 1961.
- 2) Куликов А.Н. Ненулевые состояния равновесия одной краевой задачи, моделирующей явление дивергенции крыла в сверхзвуковом потоке газа // Математическое моделирование и анализ информационных систем. Ярославль. 1997. Вып 4. С. 69–72.