Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Пространственно-неоднородные режимы одной гибридной краевой задачи

Научный руководитель – Глызин Сергей Дмитриевич

Костерин Дмитрий Сергеевич

Студент (магистр)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: kosterin.dim@mail.ru

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi - \beta(\xi^2 - M(\xi^2)) - (1-\beta)(\xi^3 - M(\xi^3)), \tag{1}$$

где $\beta \in [0;1]$, $\xi = \xi(t,x)$, $M(\xi) = \int\limits_0^1 \xi(t,x)\ dx$. Дополним уравнение (1) периодическим краевым условием

$$\xi(t, x+1) = \xi(t,x) \tag{2}$$

и условием

$$M(\xi) = 0. \tag{3}$$

Определение 1. Пусть $\xi(t,x) \equiv \xi_*(t)$ и удовлетворяет задаче (1)–(3). Тогда такое решение называется однородным по пространственной переменной x.

Определение 2. Любое решение краевой задачи (1)–(3), нетривиально зависящее от x (условие $\xi(t,x) \equiv \xi_*(t)$ не выполняется хотя бы в одной точке), будем называть пространственно-неоднородным.

Для задачи (1)–(3) необходимо найти пространственно-неоднородные решения и определить условие их устойчивости.

Краевая задача (1)–(3) имеет семейство однопараметрических решений, зависящих от параметра $\alpha \in (0;1)$, в виде ступенчатых функций с разрывом в точке α.

Теорема 1. *Краевая задача (1)–(3) имеет семейство кусочно-линейных по пространственной переменной x решений. При $\beta = 1$ данные решения имеют вид*

$$\xi(t,x) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}, & 0 < x < \alpha \\ -\frac{\alpha}{1-2\alpha}, & \alpha < x < 1 \end{cases}. \tag{4}$$

При $\beta = 0$ эти решения имеют вид

$$\xi(t,x) = \begin{cases} \pm\frac{1-\alpha}{\sqrt{1-3\alpha+3\alpha^2}}, & 0 < x < \alpha \\ \mp\frac{\alpha}{\sqrt{1-3\alpha+3\alpha^2}}, & \alpha < x < 1 \end{cases}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть $\beta = 0$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Тогда решения (5) локально асимптотически устойчивы.*

При $\beta = 1$ пространственно-неоднородные решения (4) являются неустойчивыми.