Секция «Геометрия и топология»

Алгоритмическое описание слоения Лиувилля интегрируемых биллиардов в невыпуклых областях

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Москвин Виктор Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: aoshi.k68@gmail.com

Математический биллиард — динамическая система, описывающая движение без трения материальной точки внутри области с абсолютно упругим отражением от границы (угол падения равен углу отражения). В книге С.Л. Табачникова [1] дан обзор актуальных исследований биллиардов. Топология совместных поверхностей уровня интегралов описывается с помощью теории А.Т. Фоменко, которая в случае полных потоков изложена в книге Болсинова–Фоменко [2]. В докладе будет представлено исследование топологии фазового многообразия плоских биллиардов, потоки в которых не являются полными вследствие наличия невыпуклых углов на границе области. Как было показано В. Драгович и М. Раднович [4] почти для всех значений интеграла в таких биллиардах совместная поверхность уровня интегралов будет гомеоморфна сфере с ручками и проколами. В докладе будет представлено топологическое описание трехмерных окрестностей двумерных комплексов, являющихся прообразами критических значения интеграла Λ.

Мы будем понимать под биллиардной областью Ω односвязную часть плоскости, ограниченную дугами софокусных квадрик из семейства:nbsp;

$$(b-\lambda)x^2+(a-\lambda)y^2=(a-\lambda)(b-\lambda),\ \lambda\le a.$$

Биллиард Ω не должен содержать фокусов. Также любой сегмент фокальной прямой, содержащийся в биллиарде Ω, либо лежит между фокусами, либо лежит вне фокусов. Такие биллиарды будем называть однородными.

Разрежем биллиард Ω следующим образом: если биллиард Ω не содержит сегментов фокальной прямой между фокусами, то проведем все эллипсы $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ на которых лежат вершины углов в $3\pi/2$, а если биллиард Ω не содержит сегментов фокальной прямой вне фокусов, то проведем все гиперболы $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ на которых лежат вершины не выпуклых углов. В результате биллиард Ω разобьется на биллиарды $\Sigma_1,\dots,\Sigma_N$ без не выпуклых углов на границе области. Значения дополнительного интеграла $\Lambda=\lambda_i$ и $\Lambda=b$ будут особыми [4]. Определим 3-атомы для таких биллиардов. В этом докладе они будут рассматриваться как CW-комплексы.

Определение 1. *Трехмерным атомом (3-атомом) назовем трехмерную окрестность $U\subset Q^3$ двумерного слоя G, задаваемую неравенством $c-\varepsilon\le\Lambda\le c+\varepsilon$ для достаточно малого ε, расслоённую на двумерные поверхности уровни функции Λ и рассматриваемую с точностью до послойной эквивалентности.*

Рассмотрим биллиард Ω и сегмент квадрики λ_i. Обозначим через ν число компонент связности внутри гиперболы (вне эллипса) λ_i, а через ξ — число компонент связности вне гиперболы (внутри эллипса) с параметром λ_i.

Теорема 1. *Рассмотрим однородный биллиард Ω с выбранным на нем разбиением $\Sigma_1,\dots,\Sigma_N$. Рассмотрим окрестность значения дополнительного интеграла $\lambda_i-\varepsilon\le\Lambda\le\lambda_i+\varepsilon$ и соответствующий 3-атом U_i. Тогда:*

1. Комплекс $U_i \cong \tilde{U}_i \cup (G_g \times I)$, *где* G_g *— поверхность рода* g *с приклеенными к ней* ν *цилиндрами* $S^1 \times I$ *и* $g = const$ *при изменении интеграла* Λ. *Комплекс* $\tilde{U}_i \in Q^3$ *проектируется при естественной проекции* π *в окрестность квадрики* λ_i *в бильярде* Ω*;*

2. Комплекс $\tilde{U}_i \setminus T_{\lambda_i}|_{\Lambda lt;\lambda_i} \cong (C_1 \cup \ldots \cup C_{2\nu+2\xi}) \times I$, *где* T_{λ_i} *— двумерный комплекс, построенный алгоритмически;*

3. Комплекс $\tilde{U}_i|_{\Lambda \geq \lambda_i} \cong (C_1 \cup \ldots \cup C_{2\nu}) \times I$*;*

4. Трехмерный комплекс $\tilde{U}_i \setminus T_{\lambda_i}|_{\Lambda lt;\lambda_i}$ *приклеивается к двумерному комплексу* T_{λ_i} *послойно. Данная склейка описывается алгоритмом.*

Теорема 2 описывает топологическое строение окрестности U *особого слоя* $\Lambda = b$. *См. рис. 1.*

Теорема 2. *Рассмотрим однородный биллиард* Ω *с выбранным на нем разбиением* $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$. *Рассмотрим окрестность значений дополнительного интеграла* $b - \varepsilon \leq \Lambda \leq b + \varepsilon$ *и соответствующий 3-атом* U. *Тогда:*

1. Комплекс $U \setminus (T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n}) \cong V_{\Sigma_1} \times I \cup \ldots \cup V_{\Sigma_N} \times I$, *где объединение несвязно. Здесь* T_{λ_i} *— двумерные комплексы, построенный алгоритмически, а* V_{Σ_j} *— 2-атом, соответствующий 3-атому выпуклого биллиарда* Σ_j, *см. [3];*

2. Двумерные комплексы $(T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n})$ *приклеиваются к трехмерному комплексу* $U \setminus (T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n})$ *послойно. Данная склейка описывается алгоритмом.*

Источники и литература

1) *Табачников С. Л. Геометрия и бильярды.М.;Ижевск:НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2011.*

2) *Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 1999.*

3) *Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// матем. сб. 2015, 206, 10. 127–176.*

4) *4. Dragovic V., Radnovic M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regullar Chaotic Dyn. РАН. 2009. 14. 479–494.*

Иллюстрации

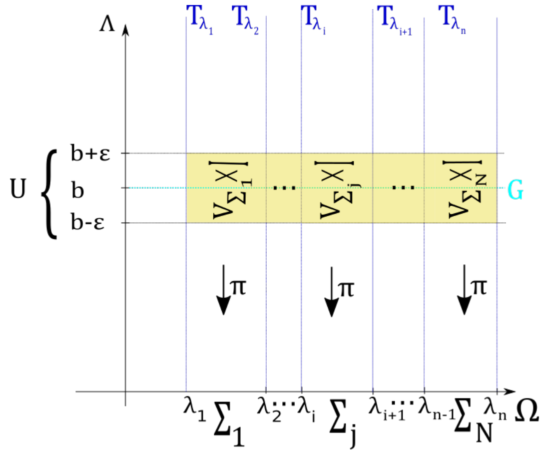

Рис. 1. Описание окрестности особого слоя невыпуклого биллиарда.