

Сравнение подходов к оцениванию параметра модели устойчивой авторегрессии первого порядка с непрерывным временем

Научный руководитель – Емельянова Татьяна Вениаминовна

Шерстобитова Анна Олеговна

Аспирант

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Механико-математический факультет, Томск, Россия

E-mail: annasherstobitova06@gmail.com

Рассматривается процесс диффузионного типа, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \theta f(X, t)dt + \sigma_t dW_t, \quad (1)$$

где $W = (W_t^1, \dots, W_t^n)_{t \geq 0}$ - винеровский процесс, а σ_t - наблюдаемая функция.

Для оценивания параметра процесса диффузионного типа предлагается использовать оценку по методу максимального правдоподобия. Такая оценка обладает свойствами асимптотической нормальности и асимптотической эффективности.

В работе проводится сравнение качества оценки, полученной на основе оптимального правила остановки и оптимального времени наблюдения.

Рассматривается задача определения последовательного оптимального плана $\delta^* = (\tau^*, d^*)$, где τ^* - правило остановки ($\tau^* \geq 0$), $d^* = d^*(\tau^*)$ - решающая функция.

Можно предположить, что параметр θ имеет нормальное распределение. Тогда для любого правила остановки верно

$$d_\tau^* = \frac{\frac{m}{\sigma^2} + \int_0^\tau f(X, t)dX_t}{\sigma^{-2} + \int_0^\tau |f(X, t)|^2 dt},$$

$$Var(\theta | F_\tau^X) = \frac{1}{\sigma^{-2} + \int_0^\tau |f(X, t)|^2 dt}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \inf_{\delta \in D} E[c \int_0^\tau |d(X, t)|^2 dt + (\theta - d)^2] = \\ & = \inf_{\tau} E(c \int_0^\tau |f(X, t)|^2 dt + \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^\tau |f(X, t)|^2 dt}) \end{aligned}$$

Если предположить, что $\theta = y$, $\int_0^\infty |f(X, t)|^2 dt = \infty$ п.н., то

$$\begin{aligned} & \inf_{\tau} E(c \int_0^\tau |f(X, t)|^2 dt + \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^\tau |f(X, t)|^2 dt}) = \\ & = \inf_{t \in [0, \infty]} (ct + \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + t}). \end{aligned}$$

Поэтому оптимальное правило остановки τ^* имеет вид

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t |f(X, t)|^2 dt = t^*(c)\}, \quad (2)$$

где $t^*(c) = \operatorname{arginf}(t \geq 0 : ct + \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + t})$, а c - цена наблюдения. Таким образом, оценка параметра модели авторегрессии с непрерывным временем представляет собой оценку по методу максимального правдоподобия, вычисленную в момент остановки τ^* .

Также для указанной модели вычисляется оценка параметра θ при использовании оптимального времени наблюдения t_0 , которое, в отличие от момента остановки, не является случайной величиной и зависит от выбора количества затрат на проведение эксперимента

$$t_0 \approx A^{\frac{1}{2}}\sigma, \quad (3)$$

где A - обратная величина цены одного наблюдения.

Источники и литература

- 1) Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев Статистика случайных процессов. – М.: Наука. – 1974