Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О сопровождающих законах в предельной теореме Б. В. Гнеденко о сходимости максимума случайных величин к распределению Вейбулла

Научный руководитель – Питербарг Владимир Ильич

Щербакова Юлия Андреевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: yulijakrivonos@gmail.com

Известна теорема Гнеденко-Фишера-Типпетта: если для максимумов независимых одинаково распределенных случаных величин существует невырожденное предельное распределение при линейной нормировке, то оно относится к одному из трех типов: Фреше, Вейбулла или Гумбеля.

В работе изучаются свойства сходимости независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения, принадлежащей максимальной области притяжения Вейбулла ($MDA(\Psi)$) [2]:

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \le a_n x + b_n) = \Psi(x) := \begin{cases} \exp\left(-(-x)^\alpha\right), & x \le 0,\ \alpha > 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим функцию распределения $F(x)$, для которой выполнено условие фон Мизеса [1]: $F \in MDA(\Psi)$ тогда и только тогда, когда существуют $g(x) \to 1$ при $x \to \infty$, положительные непрерывные $c(x)$ и $f(x)$ такие, что для некоторого $x_0 < x^*$, где x^* — крайняя правая точка, и для любого $x \in (x_0; x^*)$ выполняется:

$$1 - F(x) = c(x) \exp\left\{ -\int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{f(t)} dt \right\}, \quad x \ge x_0, \tag{2}$$

при этом $\lim\limits_{x\uparrow x^*} c(x) = c \in (0; \infty)$ и

$$\lim_{x\uparrow x^*} \frac{f(x)}{x^* - x} = \frac{1}{\alpha}. \tag{3}$$

Пусть $X_1, X_2, ...,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и $M_n := \max(X_1, , ...X_n)$. Тогда для

$$b_n = x^*, \quad a_n = x^* - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

где $F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in R : F(x) \ge t\}$ — обобщенная обратная функция, и для любого x выполняется:

$$P(M_n \le a_n x + b_n) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^\alpha e^{-\hat{\gamma}_n(x)}\right) \exp\left(-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(k+2)\gamma_n(x)}}{(k+2)n^k}\right), & x \le 0, a_n x + b_n \le x^*; \\ 1, & x > 0, a_n x + b_n > x^*, \end{cases}$$

где $\gamma_n(x)$ и $\hat{\gamma}_n$ определяются следующим образом:

$$\hat{\gamma}_n(x) = \int_{b_n - a_n}^{a_n x + b_n} \left(\frac{1}{f(t)} - \frac{\alpha}{b_n - t} \right) dt - \ln \frac{c(a_n x + b_n)}{c(b_n - a_n)}. \tag{5}$$

$$\gamma_n(x) = \hat{\gamma}_n(x) - \ln(-x)^\alpha,$$

и для любого x $\gamma_n(x) \to -\ln(-x)^\alpha$ и $\hat{\gamma}_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Также были получены следующие выражения для $\gamma_n(x)$:

$$\gamma_n(x) = -\ln \frac{1 - F(b_n + a_n x)}{1 - F(b_n - a_n)} = \ln \frac{1}{n\,(1 - F(b_n + a_n x))}. \tag{6}$$

Таким образом, при изучении сходимости к Вейбулловскому типу распределения, можно изучить поведение $\gamma_n(x) + \ln(-x)^\alpha$ при $n \to \infty$ для соответствующих значений x.

Источники и литература

1) Balkema A. A., de Haan L. (1972). On R. von Mises' condition for the domain of attraction of $\exp\{-e^{-x}\}$. *Ann. Math. Statist., 43, 1352-1354.*
2) Laurens de Haan, Ana Ferreira (2006). *Extreme Value Theory. An Introduction.* Springer.