Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Динамика бесконечной цепочки гармонических осцилляторов при случайном возмущении

Научный руководитель – Малышев Вадим Александрович

Меликян Маргарита Врежовна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: magaarm@list.ru

На прямой рассматривается бесконечная система точечных частиц единичной массы каждая $\ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$, где $x_k(t)$ - траектория частицы с номером k. Потенциальная энергия взаимодействия имеет вид:

$$U(x_k, k\in\mathbb{Z}) = \frac{\omega_0^2}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_k-ka)^2 + \frac{\omega_1^2}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_k-x_{k-1}-a)^2$$

где $a>0$, $\omega_0>0$, $\omega_1>0$ - некоторые параметры. Подобная модель исследовалась ранее, см. $[1-4]$, однако основным отличием от рассматриваемой в этих работах модели является рассмотрение уже бесконечного числа частиц. Предположим, что $x_k(0)=ka,\ \dot{x}_k(0)=0$, $k\in\mathbb{Z}$, и что на частицу с номером 0 действует некоторая возмущающая сила $f(t)$, то есть имеет место система уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}x_k(t) + \omega_0^2(x_k(t)-ka) = \omega_1^2(x_{k+1}(t)-2x_k(t)+x_{k-1}(t)) + \delta_{0,k}f(t),\ k\in\mathbb{Z}$$

Обозначим отклонение частицы от положения равновесия как $y_k(t)=x_k(t)-ka$. Пусть внешняя сила $f(t)=\dot{w}_t$ - белый гауссовский шум. Введем энергию n-й частицы, а также полную энергию системы:

$$H_n(t) = \frac{1}{2}\dot{y}_n^2 + \frac{\omega_0^2}{2}y_n^2 + \frac{\omega_1^2}{2}(y_{n+1}-y_n)^2 + \frac{\omega_1^2}{2}(y_n-y_{n-1})^2.$$

$H(t)=\frac{(p,p)}{2}+\frac{1}{2}(Vq,q)$, где $q(t)=(...y_{-1}(t),y_0(t),y_1(t),...)^T,\ p(t)=(...\dot{y}_{-1}(t),\dot{y}_0(t),\dot{y}_1(t),...)^T$,

$$V=\begin{pmatrix} ... & 0 & -\omega_1^2 & \omega_0^2+2\omega_1^2 & -\omega_1^2 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & -\omega_1^2 & \omega_0^2+2\omega_1^2 & -\omega_1^2 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Теорема 1). При фиксированных $k,n\in Z$ и $t\to\infty$ средняя энергия n-ой частицы растет как: $EH_n(t)=c\ln(t)+O(1)$, где c - некоторая константа.

2). Для любого t верно: $EH(t)=\frac{t}{2}$.

Источники и литература

1) Лыков А.А., Малышев В.А., Музычка С.А. Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием // Теория вероятностей и ее применения. 2012. Том 57, Выпуск 4. С. 794\-/799.

2) Lykov A.A., Malyshev V.A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields 18. № 4. 2012. P. 721\-/729.

3) Lykov A.A., Malyshev V.A. Convergence to Gibbs Equilibrium - Unveiling the Mystery // Markov Processes and Related Fields 19. № 4. 2013. P. 643\-/666.
4) Lykov A.A., Malyshev V.A. Liouville ergodicity of linear multi\-/particle hamiltonian system with one marked particle velocity flips // Markov Processes and Related Fields 21, № 2, P. 381\-/412.