Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Сети Джексона с ненадежными приборами: аппроксимация отраженным броуновским движением в ортанте

Научный руководитель – Баштова Елена Евгеньевна

Ленена Елена Олеговна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: elenalenena@gmail.com

Мы рассматриваем сеть $\mathcal{N}$ из K узлов, каждый из которых имеет неограниченную очередь. Входящий в систему поток - многомерный регенерирующий $A(t)$ с моментами регенерации $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Требования обслуживаются в порядке прибытия, а после обслуживания в соответствии с матрицей маршрутизации P направляются либо на другую станцию в сети, либо покидают ее. Времена обслуживания η_j и решения о маршрутизации образуют взаимно независимые последовательности н.о.р.с.в..

В нашей модели в случайные моменты происходят поломки приборов (переход в состояние ВЫКЛ из состояния ВКЛ). Ремонт сервера также занимает случайное время. Мы предполагаем, что последоватльность времен нахождения системы в состоянии ВКЛ и ВЫКЛ формируют две последовательности н.о.р.с.в. и, для jй станции обозначим их $\{u_j^i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{v_j^i\}_{i=1}^{\infty}$ соответственно. Пусть $a_j = \mathsf{E}u_j^1$, $b_j = \mathsf{E}v_j^1$, $\alpha_j = a_j(b_j + a_j)^{-1}$, $s_j^2 = \mathsf{Var}u_j^1$, $d_j^2 = \mathsf{Var}v_j^i$ for $j = 1, \ldots, K$. Обслуживание, прерванное из-за поломки, продолжается после восстановления с того состояния, где оно было прервано. Пусть $Q(t) = (Q_1(t), \ldots, Q_K(t))$ - вектор количества заявок в каждом узле в момент времени t. Система уравнений трафика для данной сети

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i \wedge \alpha_i \mu_i) p_{ij}, \quad j = 1, \ldots, K. \tag{1}$$

согласно Теореме 7.3 [1] имеет единственное решение $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_K)$. И для каждого узла j коэффициэнт загрузки $\rho_j = \gamma_j / \alpha_j \mu_j$.

Для формулировки результата необходимо ввести определение отраженного броуновского движения в положительном ортанте. Рассмотрим K-мерные процессы $Z = \{Z(t); t \geq 0\}$ и $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$, такие что $Z(t) = W(t) + Y(t)(I - P), t \geq 0$, где $W = \{W(t); t \geq 0\}$ K-мерное броуновское движение с ковариационной матрицей Γ, вектором сдвига b и $W(0) \in \mathbf{R}_+^K$; $Z(t)$ со значеними $\mathbf{R}_+^K$, $t \geq 0$; $Y_j(.)$ непрерывный и неубывающий с $Y_j(0) = 0$; и $Y_j(.)$ возрастающий при t в $Z_j(t) = 0, j = 1, \ldots K$.

В [2] показано, что для любого Броуновского движения W существует единственная пара процессов Y и Z удовлетворяющая этим условиям. На языке [1] и [2] Z - отраженное броуновское движение на $\mathbb{R}_+^K$ со сдвигом b, ковариационной матрицей Γ, и матрицей отражения $(I - P)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathsf{E}\|\theta_{i+1} - \theta_i\|^p < \infty$, $\mathsf{E}\|A(\theta_{i+1}) - A(\theta_i)\|^p < \infty$, $\mathsf{E}(\eta_j^i)^p < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, K$. *Тогда существует вероятностное пространство, на котором заданы процесс* Q *и отраженное броуновское движение* B *в положительном ортанте со сносом* $\lambda - \alpha\mu(I - P)$,*матрицей отражения* $(I - P)$, *и матрицей ковариации* $\Gamma = ||\Gamma_{kl}||_{k,l=1}^K$,

$$\Gamma_{kl} = V_{kl} + \sum_{j=1}^{K} (\gamma_j \wedge \alpha_j \mu_j) p_{jk} (\delta_{kl} - p_{jl}) + (\sigma_j^2 \mu_j^3 \alpha_j + \mu_j^2 \frac{a_j^2 d_j^2 + b_j^2 s_j^2}{(a_j + b_{v^j})^3})(\rho_j \wedge 1)(p_{jk} - \delta_{jk})(p_{jl} - \delta_{jl})$$

такие, что

$$\sup_{0 \le u \le t} \|Q_u - B_u\| \overset{a.s.}{=} O(t^{1/p'}),\ t \to \infty.$$

и $p' = p$ *для* $p < 4$ *и* p' *- любое число, меньшее* 4 *для* $p \geq 4$.

Источники и литература

1) H. Chen, D. D. Yao. Fundamentals of Queueing Networks. Springer, New York, 2001.
2) J. M. Harrison, M. I. Reiman. Reflected Brownian motion on an orthant. Ann. Probab., 1981, V. 9, No. 2, pp. 302–308.