Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Линейные отображения, сохраняющие и меняющие мажоризацию.

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Штейнер Павел Михайлович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: pashteiner@ya.ru

Доклад основан на результатах совместной работы с А.Э. Гутерманом.

Пусть $M_{n,m}$ — пространство действительных матриц размера $n \times m$ (пишем M_n при $m = n$). Столбец матрицы A под номером j обозначим $A^{(j)}$. Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $x_{[j]}$ его j-ю по невозрастанию координату.

Определение 1. Пусть x, v — вектора из $\mathbb{R}^n$. Говорим, что v *мажорирует* x, $x \preceq v$ (или $v \succeq x$), если $\sum_{j=1}^{k} x_{[j]} \leq \sum_{j=1}^{k} v_{[j]}$ для $k = 1, \ldots, n$, и при $k = n$ достигается равенство.

Определение 2. Различные типы мажоризаций матриц определяются следующим образом (см. [1], [2]):

- Слабая мажоризация: $A \preceq^w B$, если существует такая строчно-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.
- Мажоризация по направлению: $A \preceq^d B$, если $Ax \preceq Bx$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$.
- Сильная мажоризация: $A \preceq^s B$, если существует такая двояко-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.

Теорема. Пусть T — линейный оператор на $M_{n,m}$. Следующие условия эквивалентны:

1) Если $A \preceq^d B$, то $T(A) \preceq^d T(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
2) Если $A \preceq^s B$, то $T(A) \preceq^s T(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
3) Если $A \preceq^s B$, то $T(A) \preceq^d T(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
4) Если $A \preceq^d B$, то $T(A) \preceq^w T(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
5) Если $A \preceq^s B$, то $T(A) \preceq^w T(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
6) Выполнено одно из следующих утверждений:
   a) Существуют $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, такие, что $T(X) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$.
   b) Существуют $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$, такие, что $T(X) = PXR + JXS$.

Автор доклада благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и ценные обсуждения. Докладчик является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner. Majorization for matrix classes. Linear Algebra Appl., 555(2018), 201–221.
2) G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner. Majorization for (0,1)-matrices. Linear Algebra Appl., 585(2020), 147–163.
3) A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Second Edition, Springer, New York, 2011.
4) F.D. Martínez Pería, P.G. Massey, L.E. Silvestre. Weak matrix majorization. Linear Algebra Appl., 403 (2005) 343–368.