Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Периодические функции нескольких действительных переменных

Научный руководитель – Орлов Сергей Сергеевич

Соколова Галина Константиновна
Студент (магистр)
Иркутский государственный университет, Педагогический институт, Иркутск, Россия
E-mail: 98gal@mail.ru

Представляемая работа направлена на исследование свойства периодичности функции нескольких действительных переменных.

Определение. Функция $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ называется *периодической с периодом* $\bar{T}$, если найдется ненулевой вектор $\bar{T}\in\mathbb{R}^n$ такой, что при каждом $\bar{r}\in\mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\bar{r}+\bar{T})=f(\bar{r})$. Период наименьшего модуля $\bar{T}_0$, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовем *основным* периодом функции f в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$, где $\bar{T}=|\bar{T}|\cdot\bar{\mathcal{T}}$.

Описание множества всех периодов периодической функции — одна из основных задач теории периодических функций. Автором доказан ряд утверждений, позволивших описать структуру множества периодов периодической функции нескольких переменных с учетом постоянства функции как тривиального случая периодичности. Множество периодов P_f произвольной периодической функции $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ представляется в виде прямой суммы

$$\mathrm{P}_f=\Lambda(\bar{T}_1,\,\bar{T}_2,\ldots,\bar{T}_{m_1})\oplus\operatorname{span}(\bar{\mathcal{T}}_{m_1+1},\,\bar{\mathcal{T}}_{m_1+2},\ldots,\bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2}).$$

где $\bar{T}_k$ — *порождающие* векторы m_1*-мерной решетки* $\Lambda(\bar{T}_1,\,\bar{T}_2,\ldots,\bar{T}_{m_1})$ (см., например, статью [1]), $\bar{\mathcal{T}}_k$ — направления постоянства функции f, числа $n_k\in\mathbb{Z}$ и $\alpha_k\in\mathbb{R}$ одновременно не обращаются в нуль, $m_1+m_2\leqslant n$. Базисные векторы решетки $\Lambda(\bar{T}_1,\bar{T}_2,\ldots,\bar{T}_{m_1})$ являются основными периодами в своих направлениях периодической функции $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Однако обратное неверно: произвольный набор из m_1 линейно независимых основных периодов в своих направлениях периодической функции $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, вообще говоря, не образует базис решетки ее периодов. Последнее утверждение есть прямое следствие факта: базис решетки определяется неоднозначно, и он строится на векторах, которые образуют параллелепипед наименьшей меры Жордана (см. монографию [2]).

Теорема. Пусть функция $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является периодической с основным периодом $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование, тогда суперпозиция $f\circ\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является периодической функцией с основным периодом $\mathcal{A}^{-1}\bar{T}_0$ в направлении $\bar{\tau}$, где $\mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{T}}=|\mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{T}}|\cdot\bar{\tau}$.

Из данной теоремы следует, что за счет выбора линейного преобразования $\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ векторного аргумента $\bar{r}\in\mathbb{R}^n$ периодическую функцию можно сделать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным.

При исследовании пространства периодических функций вполне естественно возникает проблема периодичности сумм и произведений периодических функций. В данной работе в терминах множеств периодов установлен критерий периодичности произведений и сумм периодических функций нескольких переменных. Доказаны теоремы дифференциального и интегрального исчисления, которые применены к исследованию вопроса существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области в рамках научного проекта № 20-41-385002 р_Наставник.

Источники и литература

1) Скриганов М.М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 171. С. 3-122.
2) Conway J.H., Sloane N.J.A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York, 1999.