Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Антинормы и автополярные многогранники

Научный руководитель – Протасов Владимир Юрьевич

Макаров Максим Сергеевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: maximka1905@mail.ru

Понятие антинормы в линейном пространстве было введено Merikoski J. K.[1] в 1990 году. Затем его независимо использовали Richter W-D., Guglielmi N. [2], Zennaro M. [2], Protasov V. Yu. при решении различных прикладных задач. Антинорма — это положительно однородный вогнутый функционал, заданный на некотором конусе в $\mathbb{R}^n$, то есть антинорма является вогнутым аналогом нормы. Многие задачи теории функций и численного анализа приводят к данному понятию.

Теория двойственности, применимая к понятию нормы, может быть распространена и на антинормы. При этом выполняются аналоги многих теорем выпуклой теории (неравенство Йенсена, теорема Фенхеля-Моро, теоремы отделимости). Оказалось, однако, что в отличие от норм (где единственной самодвойственной нормой является евклидова) существует множество различных самодвойственных антинорм. Например, в $\mathbb{R}^2$ существуют кусочно-линейные самодвойственные антинормы. Единичный шар в такой антинорме является автополярным многогранником.

Классификация самодвойственных антинорм и автополярных многогранников в $\mathbb{R}^2$ приведена в [3]. Однако, в размерностях выше второй не было известно ни одного нетривиального примера автополярных многогранников. Их существование при $n \geq 3$ было сформулировано в виде открытой проблемы. Решением служит следующая теорема:

Теорема 1. *При любом $n \geq 2$ в положительном октанте $\mathbb{R}^n_+$ существуют автополярные многогранники, не являющиеся поднятием автополярных многогранников меньшей размерности. А также существует бесконечное множество самодвойственных антинорм в n-мерном линейном пространстве.*

В докладе будет показано построение конструкции автополярных многогранников и автополярных антинорм в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$. Также будут упомянуты некоторые приложения антинорм к задаче вычисления показателей Ляпунова линейных операторов.

Источники и литература

1) Merikoski J. K. On $I_{p1,p2}$ antinorms of nonnegative matrices // Linear Algebra Appl. 140 (1990), 31–44.
2) Guglielmi N. and Zennaro M. An antinorm theory for sets of matrices: Bounds and approximations to the lower spectral radius // Linear Algebra Appl. 607 (2020), 89–117.
3) Protasov V. Yu. Antinorms on cones: duality and applications // preprint, submitted to Linear and Multilinear Algebra.